This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

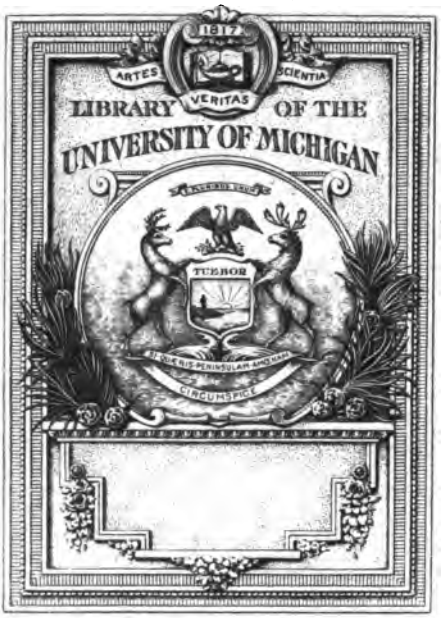
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
95
.B65
1835

QA
95
B65
1835

Ich kehr' bei frohen Leuten ein,
Und lehre Vieles nett und fein
Im Ernst und Scherz, zum Lustverein.

Ar. W.

Alle Stimmen erhält, wer das Süsse dem
Nützlichen beimischt.

Die

arithmetiſchen Wunder

und

der komiſch-poetiſche Arithmetiker

für

Freunde humoriſtiſcher Rechenkunſt.

Sammlung

merkwürdiger Zahlenergebniſſe

und

unterhaltender Entzifferungen verſchiedener Arten des Karten- und Würfelſpiels;

Berechnung

des

Lottoſpiels mit 90 Nummern,

der Klaſſenlotterien, der Leibrenten und Tontinen. Die wahrſcheinliche Lebensdauer und Mortalitätstafeln;

nebſt

Bemerkungen über Aſſekuranzen, Spar- und Witwenkaſſen; Erklärung des dyadiſchen und decadiſchen Zahlenſyſtemes, der Sitter- und Geheimſchrift und Dechiffrirkunſt.

Von

L. Blumtreu.

Dritte, mit einem Kupfer verſehene Ausgabe.

Wien, 1835.

Gedruckt und verlegt bei Schrämbl,

Dorotheergaſſe, Nro. 1111.

Ich kehr' bei frohen Leuten ein,
Und lehre Vieles nett und fein
Im Ernst und Scherz, zum Lustverein.

Ar. V.

Alle Stimmen erhält, wer das Süsse dem
Nützlichen beimischt.

Die

arithmetiſchen Wunder

und

der komiſch-poetiſche Arithmetiker

für

Freunde humoriſtiſcher Rechenkunſt.

Sammlung

merkwürdiger Zahlenergebniſſe

und

unterhaltender Entzifferungen verſchiedener Arten des Karten- und Würfelſpiels;

Berechnung

des

Lottoſpiels mit 90 Nummern,

der Klaſſenlotterien, der Leibrenten und Tontinen. Die wahrſcheinliche Lebensdauer und Mortalitätstafeln;

nebſt

Bemerkungen über Aſſekuranzen, Spar- und Witwenkaſſen; Erklärung des dyadiſchen und decadiſchen Zahlenſyſtemes, der Sitter- und Geheimſchrift und Dechiffrirkunſt.

Von

L. Blumbireu.

Dritte, mit einem Kupfer verſehene Ausgabe.

Wien, 1835.

Gedruckt und verlegt bei Schrämbl,

Dorotheergaſſe, Nro. 1111.

QA
95
.B65
1835

Hist. of Sci.
Gilhofer
10-31-29
20560

Vorwort.

Die Absicht des Herausgebers dieser, theils aus ganz neuen, theils aus schon bekannten Rechnungskünsten bestehenden Sammlung wird, wie er sich schmeichelt, aus der Behandlungsart erkannt werden.

Es sind nicht immer die scharfsinnigsten Einfälle, die am besten unterhalten, und es gewährt oft mehr Vergnügen, den Klugen durch ein ganz einfaches Künstchen in Verlegenheit zu setzen, als durch einen sinnreich angelegten Fallstrick zu fangen.

Wird es überdieß noch einer Entschuldigung bedürfen, daß der unterhaltenden Mannigfaltigkeit zu Gefallen in dieser Auflage der komisch-poetische Arithmetiker aufgenommen worden ist, so soll dieser Scherz blos dazu dienen den humoristischen Rechner zu belustigen und den Uibergang von den einfachen zu den verwickelteren Combinationen zu erleichtern, und stufenweise zu den Uibun-

gen anzuleiten, wodurch das Rechnen eigentlich zu einer angenehmen und nützlichen Geistesbeschäftigung wird?

So wie der Verfasser hiermit einige fruchtbare Saamenkörner auszustreuen, den Anfänger im Rechnen zum eigenen Nachdenken aufzumuntern, und bei mehreren die Lust zur weiteren Bekanntschaft mit der Wissenschaft der Zahlen zu erwecken hoffte, so hatte er auch hauptsächlich den Zweck vor Augen, einen Zweig der Rechenkunde, welcher bisher nur von sehr wenigen, ausser der Klasse der Geometer und Physiker benutzt worden ist, durch leichtfaßliche Gründe, und anziehende Beispiele bekannter zu machen. Die Wahrscheinlichkeitsberechnung überrascht nicht nur den menschlichen Geist auf eine sehr angenehme Art, durch die Aufschlüsse, die sie über zukünftige Dinge giebt, sondern sie ist auch in vielen Angelegenheiten des Lebens, und zwar vorzüglich in denjenigen des Handels und der Staatswirthschaft, von entschiedenem Nutzen.

Erklärung der vorkommenden Rechnungszeichen.

+ iſt das Zeichen der Addition.

8 + 2 + 5 bedeutet die Summe der Zahlen 8, 2 und 5, alſo 15.

— das Zeichen der Subtraction

8 — 2 iſt 8 weniger 2, alſo 6.

× das Zeichen der Multiplication.

8 × 5 bedeutet 8 mal 5, oder das Product 40 der Factoren 8 und 5. Auch zeigt man dieß blos durch einen Punct zwiſchen den Factoren an. Es iſt 8 . 5 daſſelbe was 8 × 5 vorſtellt. Auf eben die Art drückt man durch 8 × 5 × 2 oder 8 . 5 . 2 das Product 80 der Factoren 8, 5 und 2 aus.

= das Gleichheitszeichen.

8 × 5 = 40 heißt ſo viel, als 8 mal 5 iſt gleich 40. Hiernach iſt auch

8 × 5 × 2 = 40 × 2 = 80 und 8 × 5 + 2 = 40 + 2 = 42.

Beſteht ein Product aus gleichen Factoren, wie zum Beiſpiel 5 × 5 × 5 = 25 × 5 = 125,

ſo wird es noch kürzer durch die Bezeichnung 5^3 angedeutet. Die oben angeſetzte Zahl (3) giebt zu verſtehen, wie viel mal die darunter ſtehende Zahl (5) als Factor

des Products angesetzt werden soll, und wird der Exponent genannt.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 5^2 \times 5 = 25 \times 5 = 125$

ist also wohl zu unterscheiden von

$5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$.

Das Product zweier gleichen Factoren heißt eine Quadratzahl oder auch ein Quadrat, und der Factor, die Quadratwurzel desselben, oder auch nur die Wurzel.

144 ist z. B. eine Quadratzahl weil $12^2 = 12 \times 12 = 144$ und 12 die Quadratwurzel von 144.

Das Product dreier gleichen Factoren ist eine Kubikzahl. 1728 z. B. ist eine Kubikzahl, weil $12^3 = 12^2 \times 12 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$ und 12 ist die Kubikwurzel von 1728.

So wie man aber durch die Exponenten 2 und 3 anzeigt, daß das Quadrat oder der Kubus (Würfel) einer Zahl genommen werden soll, so bedient man sich des Zeichens $\sqrt[2]{}$ für die Quadratwurzel und des Zeichens $\sqrt[3]{}$ für die Kubikwurzel.

$\sqrt[2]{144}$ ist so viel als 12 und auch $\sqrt[3]{1728}$ so viel als 12, weil $12^2 = 144$ und $12^3 = 1728$.

Die Division wird in der Form eines Bruchs angezeigt. Soll zum Beispiel mit 2 in 36 dividirt werden, so schreibt man $\frac{36}{2}$ und es ist $\frac{36}{2} = 18$;

eben so auch $\frac{35 \cdot 10}{2 \cdot 5} = \frac{350}{10} = 35$.

Der
poetisch-komische
Arithmetiker
für
Freunde humoristischer Rechenkunst.

Nro. 1.

Es kam ein Mann vom Dorfe Lecken,
Und hat auf jeder Schulter sieben Stecken,
An jedem Stecken sieben Kiepen, *)
Drin hörte man's miauen und auch piepen.
In jeder Kiepe waren sieben Katzen,
Sehr große, diese würgten Mäus' und Ratzen;
Bei jeder alten waren sieben kleine,
Die fraßen aber noch nicht alleine;
Und jede von allen den Mieschen
Stand auf zierlich geleckten vier Füßchen;
Dann gehörte, als Freund und Berather,
Zu jedem Dutzend auch noch ein Kater.

*) Kiepe, in Oesterreich die Grainze.

Nun auf, mein Arithmetikus,
Denk' nach, und sei kein Asinus!
Wie viel der Kater, der Kätzchen und Katzen,
Der Stecken, der Kiepen, und endlich der Tatzen
In des Leckenschen Mannes Bündel enthalten?
Vergiß mir aber weder die jungen noch die alten,
Denn es frommt mir, zu wissen auf ein Haar,
Wie stark das Charivari-Orchester war. —

Facit:

457½ Kater, 4802 Kiezen, 686 Katzen,
14 Stecken, 98 Kiepen, 23781½ Tatzen.

Nro. 2.

Vor W..., in Busch und Reisig,
Liegt ein verwünschter Berg,
Ist hingekarrt anno dreißig
Von einem bösen Zwerg,
Den einst die Mädchen belogen,
Die Jungfrauen schnöde betrogen.
Der Berg ist fünfzehn Ellen hoch
Und fünfzehn Ellen breit,
Und mißt Du auch die Länge noch,
Die ist gerade auch so weit.
Man sieht ihn nur um Mitternacht;
An ihm soll jeder Stein,
Durch Höllentrug und Satansmacht,
Netto ein Kubikzoll sein.
Jeder Stein bedeutet ein Jungfräulein,
Sehnsüchtig nach einem Mann,
Alle Samstag kommen sechs Vögelein
Und packen drei Steinchen an.
Sie fliegen in stiller Mitternacht

Und sei sie so schwarz wie Pech,
Wo der Wächter von St. Stephan wacht,
Uiber den Glockenstuhl hinweg;
Da lassen denn eilig die Vögelein
Aus dem Munde fallen den schweren Stein:
So viel von diesen die Glocken rühren,
So viel Jungfrau'n wird die Woche der Brautkranz zieren;
Doch einer der Steine geht stets verloren,
Nur zweimal klinget zu unsern Ohren,
Hell tönend, metallreich, der Glocke Schlag.
Der dritte Stein tönt klanglos nach. —
Und geht es nun so nach der Jungfrau'n Gefallen,
Daß die Vöglein fein emsig zum Steinhaufen wallen,
Auf Schüler, gieb mir behend nun an:
Wann kommt die allerletzte dran?

Facit:

Anno 300911 im December.

Nro. 3.

Ein Schneider litt am Unterleib',
Und seufzte dann zum Zeitvertreib
Bei jedem Stiche zweimal laut,
Da gab's viel Seufzer für die arme Haut.

Nun näh't er einer Landmamsell
Den Winterpelz von Katzenfell.
Bei'm Leder war es leider Brauch,
Daß unser vielgeplagte Gauch
Der Seufzer drei e von sich ließ,
So oft er durch das Pelzwerk stieß.

Geſetzt die Summe der Stiche allzumahl,
Sei zwanzig Tauſend an der Zahl,
Und von der Summe groß und viel
Die Hälfte in das Pelzwerk fiel,
Die andre Hälfte nun im Kleide
Statt hätt', ſo wär's mir große Freude,
Könnt'ſt Du, mein Sohn, mir offenbaren,
Wie viel des Schneiders Seufzer waren.

Facit:
50000 Seufzer.

Nro. 4.

Und hatt' er hundertmal geſtöhnt,
Hatt' er ſich leider angewöhnt,
Die durch den Zug erſtarrten Sehnen
Mit Dünnbier wieder auszudehnen.
Er goß auf ſeiner Kehle Glut
Stets einen vollen Fingerhut;
Derſelben gehen ſonder Spaß
Wohl drei und neunzig auf ein Maß.
Nun ſchnell, beſinne dich nicht lang',
Sag' an, wie viel der Meiſter trank,
Und wie viel der Geſelle mit,
Der halb nur an der Beſchwerde litt.

Facit:
Der Meiſter trank $5\frac{23}{24}$ Maß.
Der Geſelle . $2\frac{23}{24}$ Maß.

Nro. 5.

Es war ein König in Polen,
Der liebte kohlſchwarzes Geſpann,
Zwar nicht von Pferden und Fohlen,
Sechsfüßler ſpannt' er ſich an.

Es wog der König von Polen,
Hübsch stark gewachsen und rund,
Vom Kopf bis hinab zu den Sohlen,
Wohl hundert und achtzig Pfund.

Der Wagen sammt allem Geschirre,
War schön mit Golde gefaßt,
Der wog, daß der Rechner nicht irre,
Des Königs doppelte Last.

Nun zieht nach dem Urtheil der Kenner,
Die genau berechnet die Zahl,
Ein schwarzer sechsfüßiger Renner
Sich selber just dreißig mal.
Nun gehen dieser muthigen Rappen,
Die man sonst auch anders noch nennt,
Die nicht ängstlich im Finstern tappen,
Wohl hundert auf ein Quent. *)

Wie viel von diesem Geblüte
Nahm man damals aus dem Gestüte,
Den König vor allen Dingen,
Von Ort zu Orte zu bringen?

Wie viel, daß die Rosse nicht gleiten,
Mußten damals die Schmiede bereiten
Der Eisen im Königreich Polen?
Sag' es schnell und unverholen. —

Facit:
230400 Renner; 1.382.400 Eisen.

*) Oberd. Quintel, der 4te Theil eines Lothes.

Nro. 6.

Ich kannt' einſt einen Thürmer,
Der ſchlug oft ſeine Frau
Und ſeine armen Würmer
Blitz-korneblumenblau.
Er ſchlug ſie früh und ſpät,
Bei Tage wie bei Nacht,
Wenn früh der Hahn kaum kräht',
Wenn ſpät der Mond am Abendhimmel wacht'.
So oft der Hammer auf die Glocke ſank,
So oft fiel auch ein Schlag,
Und eh' der Glockenton verklang,
Hallt's auch noch dumpfig nach.
Der Wand'rer an des Thurmes Pforte
Brach, wenn der Schlag verhallt,
Gleich aus in die ſinnigen Worte:
Horch, wie hier das Echo ſchallt! —
Das Weib bekam den erſten Hieb,
Den zweiten der älteſte Sohn,
Dem folgte der zweit', und wenn noch was blieb,
Bekam auch die Tochter davon;
Und war's damit nicht abgethan,
So fing er ſtraks von vorne an.
So hat er es das ganze Jahr getrieben.
Nun ſag' mir an, wie viel von all den Hieben
Der armen Eh'frau bei Tag und bei Nacht
Das Thurmwächterleben zur Hölle gemacht;
Wie viel davon zu erſt der Sohn
Davon trug ohne Gnad' und Pardon;
Wie viel dann ferner von dieſen allen
Auf das zweite Söhnlein im Zorne gefallen;

Und wie viel, auch dieses noch zu betrüben,
Dem Töchterlein endlich übrig geblieben.
Jedoch ist noch zu bemerken dabei,
Daß nächtlich 6 Stunden, von 9 bis 3, *)
Er ruhig und sanft sich dem Schlaf überließ,
Wo er höchstens mit dem Bein an den Bettboden stieß.

Facit:

Die Mutter 13140 Schläge,
Der älteste Sohn 11315 „
Der zweite Sohn 9855 „
Die Tochter 8395 „

Nro. 7.

Man sagt, daß im Königreich Sachsen
Die hübschen Mädchen auf den Bäumen wachsen;
Wir wollen uns darum nicht grämen,
Sondern die Sache als Wahrheit nehmen.
Einen solchen Thoren giebts aber wohl kaum,
Der da meinte, daß ein einziger Baum
Diese Frühlingsblüthen zu Schocken trüge;
Ich habe an einer auf jedem zur Genüge.
Auch haben wir das nicht zu übersehen,
Daß die Bäum' auf windigen Bergeshöhen
Von der edlen Frucht nur wenig bringen;
Denn wenn die Stürme dagegen dringen,
Und bei der Aeste Schwanken und Taumeln
Die Früchtchen fliegen und baumeln,
Sieht man sie oft zur Erde dröhnen,
Anfallen und — sie gehören nicht mehr zu den Schönen.

---

*) Mit der Glocke schlug er um neun um die Wette,
Drei aber zählt' er noch im Bette.

Auch glaub' ich, daß ihr alle wißt,
Daß man dieſe lieblichen Dirnen
Dort nicht mit Viertel und Scheffel mißt,
Wie Borsdorfer Aepfel und Birnen.
Wenn nun das ganze Sachſenland,
Von Skeudiß bis an Böhmens Rand,
Mit Berg und Thal und Wald und Feld,
Zwei hundert ſiebzig Meilen hält,
Davon zwei Drittel zu unſerm Heil
Ganz eben und nur ein Drittel ſteil;
Der Mädchenwuchs aber auf ebenem Feld
Sich zum Berg wie 5 zu 1 verhält,
Und im Flachfeld nun bei guten Jahren
Auf der Meile ſiebzig gereifet waren:
Wie viel holen dann in Sachſens weitem Land,
In jenen vom Himmel geſegneten Räumen,
Im Monat [illegible]ptember mit zarter Hand,
Die jungen Burſche der Mädchen von den Bäumen?

Facit:

13860 hübſche Mädchen.

Nro. 8.

Bei Heidelberg am Neckarſtrand,
Im reichbegabten Pfalzerland,
Da liegt das große Faß,
Einſt voll vom edlen Naß;
Ihm kommt kein andres gleich
Im heil'gen deutſchen Reich.

Und unten an des Faſſes Rand
Da ſteht ein Mann in ſchoſſer Tracht,
Der hat bei Lebenszeit die Hand
Nicht weg vom Glas gebracht;

Ihm kam kein andrer gleich
Im ganzen deutschen Reich.

Drei hundert Fuder hielt das Faß,
Und all sein lebelang
Genügt' es dem, der's voll besaß,
Auch wenn er tapfer trank.
Unser Männlein 18 Maß genoß
Am schlichten Werkeltag,
Doch jeden lieben Sonntag goß
Er noch sechs Mäßlein nach. —

Da nun ein Fuder in aller Welt
Just 24 Anker hält,
Und jedes gute Ankerfaß
Wieder in sich schließet vierzig Maß,
Der Zecher aber ohne Schanden,
Dem Ehrenamte vorgestanden
Gerade ein und vierzig Jahr:
So sag' mir, Schüler, auf ein Haar,
Ob er, als ihn der Tod entriß,
Noch eine Neige hinterließ?

Facit:
5838 Maß.

Nro. 9.

Dort oben auf dem Hügel,
Da wächset mancher Prügel;
Und rings im flachen Landel,
Da wohnt ein schlechtes Bandel.
Und dieses Bandel zu ziehen,
Mit Sorgen und mit Mühen,

Nun auf, mein Arithmetikus,
Denk' nach, und sei kein Asinus!
Wie viel der Kater, der Kätzchen und Katzen,
Der Stecken, der Kiepen, und endlich der Tatzen
In des Leckenschen Mannes Bündel enthalten?
Vergiß mir aber weder die jungen noch die alten,
Denn es frommt mir, zu wissen auf ein Haar,
Wie stark das Charivari-Orchester war. —

Facit:

457½ Kater, 4802 Kiezen, 686 Katzen,
14 Stecken, 98 Kiepen, 23781½ Tatzen.

Nro. 2.

Vor W..., in Busch und Reisig,
Liegt ein verwünschter Berg,
Ist hingekarrt anno dreißig
Von einem bösen Zwerg,
Den einst die Mädchen belogen,
Die Jungfrauen schnöde betrogen.
Der Berg ist fünfzehn Ellen hoch
Und fünfzehn Ellen breit,
Und mißt Du auch die Länge noch,
Die ist gerade auch so weit.
Man sieht ihn nur um Mitternacht;
An ihm soll jeder Stein,
Durch Höllentrug und Satansmacht,
Netto ein Kubikzoll sein.
Jeder Stein bedeutet ein Jungfräulein,
Sehnsüchtig nach einem Mann,
Alle Samstag kommen sechs Vögelein
Und packen drei Steinchen an.
Sie fliegen in stiller Mitternacht

Und sei sie so schwarz wie Pech,
Wo der Wächter von St. Stephan wacht,
Uiber den Glockenstuhl hinweg;
Da lassen denn eilig die Vögelein
Aus dem Munde fallen den schweren Stein:
So viel von diesen die Glocken rühren,
So viel Jungfrau'n wird die Woche der Brautkranz zieren;
Doch einer der Steine geht stets verloren,
Nur zweimal klinget zu unsern Ohren,
Hell tönend, metallreich, der Glocke Schlag.
Der dritte Stein tönt klanglos nach. —
Und geht es nun so nach der Jungfrau'n Gefallen,
Daß die Vöglein fein emsig zum Steinhaufen wallen,
Auf Schüler, gieb mir behend nun an:
Wann kommt die allerletzte dran?

Facit:

Anno 300911 im December.

Nro. 3.

Ein Schneider litt am Unterleib',
Und seufzte dann zum Zeitvertreib
Bei jedem Stiche zweimal laut,
Da gab's viel Seufzer für die arme Haut.

Nun näh't er einer Landmamsell
Den Winterpelz von Katzenfell.
Bei'm Leder war es leider Brauch,
Daß unser vielgeplagte Gauch
Der Seufzer dreie von sich ließ,
So oft er durch das Pelzwerk stieß.

Nro. 10. Die Folgen des Spiels.

Woher kommt es, daß der Verdruß über eine verlorne Summe Geldes, nicht durch das Vergnügen über den Gewinn der gleichen Summe, aufgewogen wird?

Es kommt daher, daß unsere Mittel durch den Gewinn derselben Summe, nicht in eben dem Verhältniß vermehrt, worin sie durch den Verlust vermindert werden.

Besitze ich fl. 1000 und verliere ich fl. 500 davon, so wird mein Vermögen auf die Hälfte heruntergebracht, gewinne ich aber fl. 500, so werde ich nicht doppelt so reich.

fl. 1500 verhalten sich zu fl. 1000 wie 1 zu $\frac{2}{3}$
fl. 1000 — — fl. 500 wie 1 zu $\frac{1}{2}$.

Der Unterschied zwischen diesen Verhältnissen ist $\frac{1}{6}$; durch den Verlust derselben Summe werden meine Mittel also um $\frac{1}{6}$ stärker vermindert, als durch den Gewinn vergrößert. Spielen zwei Spieler von gleichen Mitteln gegen einander, so wird, wie Büffon sehr richtig bemerkt, welcher diese Frage zuerst in dem Versuch einer moralischen Arithmetik*) aufstellte, der Verlierende nicht nur durch den Verdruß über die betrogene Hoffnung, sondern auch durch diesen Uiberschlag, der ihm nun klar wird, weit mehr gepeinigt, als der andere durch den Besitz des Gewinns beglückt wird. Man kann folglich auch in dem

*) *Essai d'arithmétique morale*; *t. IV. du supplément de l'histoire naturelle.*

Fall des gleichen Vortheils, wo gleiche gegen gleiche Summen gewagt werden, nie so viel gewinnen als verlieren und handelt um so thörigter, wenn man große Summen aufs Spiel setzt.

Diese Betrachtung führt auf die natürliche Frage, wie groß der Gewinn seyn müsse, der bei einem bestimmten Vermögen, von gleicher Wichtigkeit mit einem bestimmten Verlust wäre? Wenn der Spieler, welcher in dem Besitze von fl. 300 gewesen wäre, davon $\frac{1}{6}$ oder fl. 50 verloren hätte, so könnte man zum Beispiel fragen, wie viel er hätte gewinnen müssen, damit der Gewinn von gleicher Wichtigkeit für seinen Vermögenszustand gewesen wäre? Die Antwort hierauf wird leicht gefunden, wenn man überlegt, daß das Vermögen nach dem Verlust, zu dem anfänglichen Vermögen sich wie

250 zu 300, oder wie 5 zu 6 verhält;

daß demnach bei dem Gewinn auch das anfängliche zu dem nachherigen Vermögen, sich wie 5 : 6 verhalten soll; das letztere ergiebt sich dann mit fl. 360 aus der einfachen Regel Detri.

$$5 : 6 = 300 : ?$$

und subtrahirt man fl. 300 davon, so zeigt der Rest von fl. 60 den gesuchten Gewinn an.

Dasjenige was er mit fl. 250 noch bestreiten kann, verhält sich zu demjenigen was er mit fl. 300 bestreiten konnte, wie 5 zu 6, und ebenso verhält sich nun dasjenige, was er mit fl. 300 erlangen konnte, gegen das was er mit fl. 360 erlangen kann. Hätte er aber auch nur fl. 50 gewonnen, so würde das Verhältniß

300 zu 350 oder 6 : 7

gewesen, und der Verlust um $\frac{1}{6}$ weniger $\frac{1}{7}$, das ist um $\frac{1}{42}$ bedeutender als der Gewinn für ihn seyn.

Nro. 11. Die geborgte Zahl, oder die Kunst eine gedachte Zahl zu errathen.

Ich verberge eine gewisse Anzahl Marken, z. B. 48, in meiner Hand und ersuche eine Person aus der Gesellschaft, sich eine beliebige Anzahl Ducaten zu denken, hierzu noch eben so viel Ducaten zu fügen, die ein Reicher ihr ohne Zinsen borgen, und dann noch 12 Stück, die ich ihr schenken wolle, wobei ich jedoch die Bedingung mache, daß sie die Hälfte von Allem zum Besten einer nothdürftigen Familie verwenden solle. Da sie sich hierzu bereitwillig zeigt, so fordert der reiche Mann sein Geld zurück, aus Furcht daß er es durch diese übertriebene Gutmüthigkeit verlieren könne. Zur Entschädigung lasse ich sie die übrige Hälfte auf eine Gewinn versprechende Spekulation anlegen, die so glücklich ausfällt, daß sie das Zehnfache einbringt. Hiervon ersuche ich die Person nun das Geschenk von 12 Ducaten wieder abzuziehen, und zur Dankbarkeit ins Waisenhaus zu schicken, und indem ich ihr meine geschlossene Hand darreiche, sage ich: halten Sie diese Hand fest, nennen Sie der Gesellschaft Ihre übrige Ducaten-Zahl, denn Sie müssen in meiner Hand (die ich nun öffne), eben so viele Marken finden, zum Beweis, daß ich Ihre Zahl schon zum Voraus kannte. Worin besteht nun dieser Kunstgriff?

Durch das Anlehen ließ ich die gedachte Zahl verdoppeln, und durch das Geschenk noch um 12 vermehren. Von der Summe ließ ich die Hälfte wieder abgeben, die übrige Hälfte enthielt also nur noch die geborgte Zahl und die Hälfte meines Geschenks; nach Abzug des Anlehens verschwand nun auch die geborgte Zahl, und es blieb nur noch 6, die Hälfte meines Geschenks übrig, die

ich durch die Multiplication mit 10 auf 60 und durch den Abzug von 12 auf 48 bringen ließ.

Es ist hiernach leicht einzusehen, wie dieses Kunststückchen zur verlangten Wiederholung variirt werden kann, aber noch besser in diesem Fall das folgende dafür zu geben.

Nro. 12. Die verborgenen Rechenpfennige.

Ich gebe Jemand 12 Rechenpfennige, um davon 8 in der einen und 4 in der andern Hand zu verbergen. Ist dieß geschehen, so lasse ich ihn den Inhalt der rechten Hand duppliren, der linken trippliren, die Producte addiren, die Summe halbiren und 15 von der übrigen Hälfte subtrahiren, den Rest mit irgend einer Zahl, gleichviel mit welcher, multipliciren und dann noch eine ihm selbst beliebige Rechnung mit dem Facit vornehmen. Geben Sie sich weiter keine Mühe, unterbreche ich ihn nun, ich weiß doch daß Sie die 4 in Ihrer Rechten und die 8 in Ihrer Linken verborgen haben, öffnen Sie Ihre Hände nur, um auch die übrige Gesellschaft davon zu überzeugen.

Hätte er etwas gegen den Abzug von 15 eingewendet, so würde ich sagen, daß er 8 in der Rechten und 4 in der Linken habe, denn hierin liegt das ganze Geheimniß. Nahm er nämlich 8 in die Rechte und 4 in die Linke, so erhielt er 16 für das Doppelte zur Rechten,

12 für das Dreifache zur Linken, also die

Summe 28, und von der Hälfte 14 konnte er 15 nicht abziehen. Macht er nun diese Bemerkung, oder zögert er auch nur, unschlüssig was er thun solle damit, so komme ich ihm zuvor und sage, ziehen sie 15 oder auch sonst etwas Beliebiges ab, es gilt gleich was sie wollen. Trifft es sich daß der Abzug angeht, so wird man um so viel

mehr Mühe haben, den Grund des auffallenden Künstchens zu errathen. Wird die Wiederholung verlangt, so muß man sie variiren, indem man andere Zahlen giebt, wobei wieder ein gewisser Abzug nur auf Eine Art möglich ist, oder das Folgende geben.

Nro. 13. Die gewählte Zahl zu berechnen.

Ich lasse Jemand eine Zahl im Geheimen aufschreiben und mit sich selbst multipliciren: alsdann auch eine Zahl die um 1 größer als die gewählte ist, mit sich selbst multipliciren; die Producte von einander subtrahiren und nun den Rest angeben.

Hieraus finde ich die gewählte Zahl, wenn ich noch 1 davon abziehe, und von dem Uibrigen die Hälfte nehme. Es sey z. B. 12 die gewählte Zahl, so ist das Product 144, ferner ist 13 die um 1 größere Zahl und hiervon das Product 169. Man giebt mir also den Unterschied 25 dieser Producte an, hiervon subtrahire ich 1 und theile den Rest 24 durch 2, so erhalte ich die gewählte Zahl 12. Dieß gründet sich auf die Bemerkung, daß der Unterschied zweier Quadratzahlen, deren Wurzeln nur um 1 verschieden sind, aus der doppelten kleineren Wurzel nebst 1 besteht, oder aus der Summe der beiden Wurzeln.

z. B. von 11 ist die Quadratzahl = 121
von 10 — — = 100
Summe 21 Unterschied 21

Wenn ich 11, anstatt 10, mit 11 multiplicire, so kommt 11 oder 10 + 1 mehr heraus, und wenn ich 10 mit 11 anstatt mit 10 multiplicire, so kommt wieder . . . . . 10, mehr heraus, also in allem 11 + 10 oder . . 20 + 1, das ist das Doppelte der kleineren Wurzel und 1.

Anmerkung.

1) Diese Folgerung ergiebt sich sehr einfach durch die Rechnung mit Buchstaben. Bedeutet nämlich a die kleinere Wurzel, so ist a + 1 die größere; und das Quadrat derselben

$$= a \times a + 2a + 1$$

hiervon ab das Quadrat der kleinern . . . . . $= a \times a$

so bleibt $0 + 2a + 1$

das ist die doppelte kleinere Wurzel und 1.

2) Der Kürze halber schreibt man aa anstatt a × a, weil hiermit kein Irrthum wie bei den Zahlen entsteht. Anstatt des Multiplications-Zeichen × bedient man sich auch nur des Punktes zwischen zwei oder mehreren Zahlen, die mit einander multiplicirt werden sollen; 4. 18 = 4 × 18 = 72; 4. 5. 18 = 4 × 5 × 18 = 360.

Nro. 14. Wer zuerst 100 machen kann, oder Piquet à cheval.

Ich zähle abwechselnd mit jedem, der Lust dazu hat, bis auf 100, und lasse ihm die Wahl, anzufangen oder mich anfangen zu lassen. Keiner darf den andern mit mehr als 10 überspringen, und wer auf diese Art 100 erreichen kann, der hat die Parthie gewonnen. Ich fange z. B. mit 8 an, so kann der Gegner mit 9 bis 18, nur nicht mit 19 antworten; nimmt er etwa 15, so kann ich bis 25, aber nicht weiter über ihn springen. Gesetzt ich käme so auf 89 so müßte der Gegner nothwendig verlieren, denn er könnte nur bis 99 hiernach kommen und müßte mir die 100 überlassen.

Um die Parthie unfehlbar zu gewinnen, müßte ich mit 1 anfangen und mich an den Zahlen 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 halten, die um 11 springen; denn

um 100 zu erreichen, muß ich 89 ausgesprochen haben, welches 11 weniger als 100 ist; um mich der 89 bemeistern zu können, muß ich zuvor wieder 11 weniger, nämlich 78 ausgesprochen haben, und so geht es weiter herunter bis auf 1. Diese Zahlen sind um so leichter zu behalten, da sie der Ordnung nach mit den Ziffern 1, 1 und 2, 2 und 3 u. s. w. gebildet werden.

Anmerkung.

Man muß aber auch die Parthie unter veränderten Bedingungen gewinnen können. Soll z. B. eine gewisse Zahl n der Zusatz seyn, über den man nicht springen darf, und eine andere Zahl a anstatt 100 erreicht werden, so addirt man 1 zu n und dividirt mit der Summe in die Zahl a.

1) Bleibt nun kein Rest, so muß man den Gegner anfangen lassen, und sich an den folgenden Zahlen halten; man nimmt zuerst die Summe n + 1, dann das Doppelte derselben, hierauf das Dreifache u. s. w. Soll z. B. nicht über 9 gesprungen und 150 erreicht werden, so dividirt man mit 9 + 1, das ist mit 10 in 150, und da die Division aufgeht, so läßt man den Gegner anfangen, welcher nicht höher als mit 9 anfangen darf, und hält sich an den folgenden Zahlen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150.

2) Bleibt ein Rest bei der Division, so muß man die Parthie mit diesen Rest anfangen, und nach einander, die Summe n + 1, das Doppelte derselben, das Dreifache u. s. w. dazu setzen. Gesetzt es solle 154 erreicht werden und der größte Sprung wieder 9 seyn, so behält man bei der Division mit 10 in 154 den Rest 4, und nimmt daher die folgende Zahlen 4, 14, 24 . . . . . 134, 144, 154.

Um den Schlüssel zu diesem Räthsel zu verbergen, darf man sich der nöthigen Zahlen aber nicht gleich anfangs bedienen, sondern erst gegen das Ende der Parthie Gebrauch davon machen.

Nro. 15. Das aufrichtige Grad oder Ungrad.

Man nimmt eine Anzahl Marken in die Hand, um Grad oder Ungrad rathen zu lassen. Spricht der Gegner „grad", so nimmt man eine gerade Anzahl von Stücken aus der Hand und legt sie auf den Tisch, zum Zeichen, daß der Gegner „grad" gesprochen hat, und bleibt nun auch eine gerade Zahl in der Hand übrig, so hat er gewonnen, sonst aber verloren. Spricht er „ungrad", so legt man erst Ungrad aus der Hand auf den Tisch und er hat gewonnen, wenn jetzt noch Ungrad in der Hand übrig bleibt. Es ist einleuchtend, daß der Rathende allzeit gewinnt oder verliert, je nachdem man Grad oder Ungrad in die Hand nimmt, und daß man ihn erst einigemal gewinnen lassen muß, um ihn länger zum Besten zu haben.

Nro. 16. Das Würfelspiel, oder die Nummern zu errathen, die Einer mit 3 Würfeln wirft.

Man läßt ihn eine seiner Nummern verdoppeln und 5 dazu addiren; die Summe mit 5 multipliciren, und eine der beiden andern Nummern dazu addiren, die Summe mit 10 multipliciren, und die dritte Nummer dazu addiren. Diese Summe läßt man sich nun angeben, und zieht 250 davon in Gedanken ab; der Rest besteht aus den geworfenen 3 Nummern. Denn dieß können nur 3 von den Ziffern von 1 bis 6 seyn, wovon die eine durch das vorgeschriebene Verfahren in die Klasse der 100ter, die andere in die Klasse der Zehner versetzt wurde. Die erste Nummer wurde nämlich mit 2, hierauf mit 5, und dann mit 10, und folglich im Ganzen genommen mit 100 multiplicirt. Die zweite wurde nur mit 10, und die dritte gar

nicht multiplicirt; die zugesetzte 5 wurde mit 10 mal 5 oder 50 multiplicirt, und hierdurch das Produkt 250 zur Verdeckung des Spiels hineingebracht, nach dessen Abzug die 3 Nummern also bloß stehen. Sind z. B. die Nummern 4, 3, 6 geworfen worden, so ist

2 × 4 = 8 und hierzu 5, giebt 13
5 × 13 = 65 und hierzu die Nummer 3, giebt 68
10 × 68 = 680 und hierzu die 3te Nummer 6, giebt 686
hievon abgezogen 250
bleibt 436.

Anmerkung.

Bei dem Wurf mit 2 Würfeln, hört man mit der zweiten Operation auf, und subtrahirt nur 25 von dem Ergebniß. In Ermangelung der Würfel kann man die neun ersten Zahlen als Nummern aufschreiben, und von diesen drei Nummern ziehen lassen, um die Rechnung damit vorzunehmen.

Nro. 17. Eine unbekannte Zahl durch eine Combinationsrechnung heraus zu bringen.

Ich ersuche Jemand eine beliebige Zahl im Geheimen aufzuschreiben, und mit 3 zu multipliciren. Nun frage ich, ob das Produkt grad oder ungrad ist? Im ersten Fall lasse ich dasselbe halbiren, im zweiten aber 1 dazu setzen, und die Summe halbiren, unter dem Vorwand, daß ich dieses thue, um den Bruch zu vermeiden.

Die übrige Hälfte lasse ich wieder mit 3 multipliciren, und das Produkt, je nachdem es ungrad oder grad ist, mit oder ohne den Zusatz von 1 halbiren.

Jetzt frage ich, wie vielmal die Zahl 9 in die übrige Hälfte gehe, gleichviel ob mit oder ohne Rest, und diese

Angabe ſetzt mich in den Stand, die gewählte Zahl nach folgender Regel zu beſtimmen.

Ich multiplicire die Angabe mit 4, und addire dazu 0, 1. 2 oder 3, je nachdem bei der Multiplication mit 3,

I. das erſte und zweite Produkt grad war,

II. das erſte ungrad, das zweite grad,

III. das erſte grad, das zweite ungrad,

IV. das erſte und zweite ungrad war.

Man wählt z. B. die Zahl 10, ſo iſt das dreifache, oder 30 ein grades Produkt und 15 deſſen Hälfte.

Das Dreifache von 15 iſt 45 und ein ungrades Produkt, wozu 1 addirt wird. Die Hälfte von 46 macht 23 und hierin geht die Zahl 9 zweimal.

Ich multiplicire die Angabe 2 nun mit 4, und zu dem Produkt 8 addire ich 2, weil das erſte Produkt grad und das zweite ungrad war, nach dem III. Fall der Regel; ſo kommt die gewählte Zahl 10 heraus. Wäre die gewählte Zahl 49, ſo würde das erſte Produkt ungrad, das zweite grad, und die Angabe 12 ſeyn. Ich müßte alſo, nach dem II. Fall der Regel, 1 zu 4 mal 12 addiren, um 49 zu erhalten.

Der Grund dieſer Vorſchrift iſt aus der folgenden Tafel zu erſehen, worin die natürliche Reihe der Zahlen auf die angegebene Art berechnet iſt. Die natürliche Zahlenreihe zerfällt dabei in Klaſſen von 4 Gliedern, welches die römiſchen Ziffern in der erſten Reihe anzeigen.

I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.
1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3†1	6	9†1	12	15†1	18	21†1	24	27†1	30	33†1	36
2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18
6	9†1	15†1	18	24	27†1	33†1	36	42	45†1	51†1	54
3	5	8	9	12	14	17	18	21	23	26	27

In der zweiten Reihe ſtehen die natürlichen Zahlen.

In der dritten Reihe ſtehen die dreifachen Werthe mit oder ohne Zuſatz von 1, je nachdem ſie ungrad oder grad ſind.

In der vierten Reihe folgen die Hälften, und mit den beiden folgenden Reihen verhält es ſich wie mit der dritten und vierten.

Hieraus iſt erſichtlich, daß der Zuſatz Null oder 1, nach jedem vierten Gliede beſtändig in derſelben Ordnung vorkommt, und in den folgenden Stellungen erſcheint

1, 0, 1, 0 bei den erſten Produkten

0, 1, 0, 1 bei den zweiten Produkten,

und in allen folgenden Klaſſen ſo erſcheinen muß; denn in den gleichſtelligen Zahlen jeder folgenden Klaſſe, iſt die 4 einmal mehr wie in der vorhergehenden enthalten, und es kommt blos auf den Uiberſchuß 1, 2, 3, 0 an, ob das Produkt mit 3 eine ungrade oder grade Zahl ſeyn wird. Auch ſieht man leicht ein, daß das zweite Produkt in der erſten und vierten Stelle immer eine gerade Zahl, und in der zweiten und dritten Stelle beſtändig eine ungrade ſeyn muß, ſo daß die grade oder ungrade Beſchaffenheit der Produkte alſo ganz von dem Umſtand abhängig iſt, ob die gewählte natürliche Zahl 1, 2, 3, oder, 4, oder ein Vielfaches der 4 nebſt 1, 2, 3 oder 0 war.

War nun kein Zuſatz nöthig, ſo wurde die gewählte aus der vierten Stelle einer der Klaſſen genommen, und mit $\frac{1}{4}$ multiplicirt, da ſie 2 mal mit 3 multiplicirt und 2 mal mit 2 dividirt wurde. Die Angabe nach der Diviſion mit 9, war alſo der vierte Theil der gewählten Zahl.

Fiel die gewählte Zahl aber in eine der drei erſten Stellen Einer Klaſſe, ſo beſtand die letzte Hälfte wieder aus $\frac{1}{4}$ derſelben,

nebſt $\frac{1}{4}$ von 1 wegen dem erſten Zuſaß, oder
nebſt $\frac{2}{4}$ wegen dem zweiten Zuſaß, oder
nebſt $\frac{3}{4}$ wegen dem erſten und zweiten Zuſaß,

und da der Quotient der Diviſion mit 9 hierdurch um keine Einheit vermehrt wurde, ſo muß die gewählte Zahl alſo wieder herauskommen, wenn man den angeblichen Quotient mit 4 multiplicirt, und 1. 2 oder 3 dazu addirt, je nachdem die Produkte mit 3 ungrad oder grad waren, wie die gegebene Regel es nach der Tafel verlangt.

Anmerkung.

Dieſe Aufgabe beſchränkt ſich nicht auf die Multiplication mit 3, man kann jede der einziffrigen ungraden Zahlen dazu gebrauchen; nur nicht mit derſelben Bequemlichkeit. Läßt man mit 7 multipliciren, ſo muß man in die letzte Hälfte mit 7×7, das iſt mit 49 dividiren laſſen; läßt man mit 5 multipliciren, ſo erſcheinen die Zuſätze in der folgenden Ordnung, $\begin{matrix} 1, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{matrix}$ wonach denn die Regel abzuändern iſt, und man muß in das Endreſultat mit 5×5, das iſt mit 25 dividiren laſſen.

Nro. 18. Zwei gedachte Zahlen zu errathen.

Ich laſſe Jemand 2 beliebige, nur um 1 verſchiedene Zahlen, die jedoch nicht kleiner als 10 ſeyn ſollen, mit einander multipliciren, und mir das Produkt angeben.

Um hieraus die Zahlen wieder zu finden, ſuche ich die beiden Quadratzahlen, welche dem Produkt, im kleineren und größeren, am nächſten kommen und nehme ihre Wurzeln, wozu die Tafeln der Quadratzahlen behülflich ſind.

Giebt man z. B. das Produkt 132 an, ſo finde ich, daß die Quadratzahlen 121 und 144 demſelben am nächſten kommen, und in den Wurzeln 11 und 12 derſelben die gedachten Zahlen; das Produkt 132 muß nothwendiger-

weise zwischen den beiden Quadraten derselben liegen, denn wenn man die kleinere Zahl 11 mit 12, anstatt mit 11, multiplicirt, so kommen 11 mehr als 121, das ist 132 heraus, und wenn man die größere Zahl 12 mit 11, anstatt mit 12, multiplicirt, so kommen 12 weniger als 144, also wieder 132 heraus, oder es kommt in dem ersten Fall mehr als 11 mal 11, und im andern weniger als 12 mal 12 heraus; und dasselbe findet offenbar auch bei der Multiplication jedes andern Zahlenpaars statt, dessen Unterschied nur 1 ausmacht.

Anmerkung.

Vermittelst der folgenden Bemerkung, kann man sich sehr bequem und ohne die Beschwerlichkeit weitläuftiger Multiplicationen in den Besitz einer Quadrattafel setzen.

Die natürliche Folge der Quadratzahlen $1 = 1 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$ u. s. w., entsteht aus der successiven Summation der natürlichen Folge der ungraden Zahlen,

1, 3, 5, 7, u. s. w.

addirt man die beiden ersten ungraden Zahlen, so erhält man 4, das Quadrat von 2,

addirt man die dritte ungrade Zahl dazu, so kommt 9 das Quadrat von 3, hierzu 7 addirt, giebt 16, das Quadrat von 4 u. s. w., so daß man also nur die nächstfolgenden ungraden Zahlen zu addiren hat, um die folgenden Quadratzahlen darzustellen. Der Unterschied zweier zunächst auf einander folgenden Quadratzahlen ist also auch immer eine ungrade Zahl wie die folgende Reihe zeigt.

Differenzen	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

u. s. w.

Will man von einer gegebenen Quadratzahl ausgehend, die Tafel der folgenden Quadratzahlen aufzustellen, die zunächst zu addirende ungrade Zahl finden, so darf man nur 1 zu der doppelten Wurzel addiren, wie der Fortgang der obigen Reihe ebenfalls zeigt. Um z. B. die ungrade Zahl zu erhalten, die man zu der Quadratzahl 121 zu addiren hat, um die folgende Quadratzahl 144 zu erhalten, addirt man 1 zu zweimal 11, welches 23 giebt.

Nro. 19. Die Anzahl der Augen auf den beiden untersten Karten eines in 2 Haufen getheilten Piquetspiels zu errathen.

Nachdem Jemand aus der Gesellschaft das Spiel gemischt und in 2 Haufen vertheilt auf den Tisch gelegt hat, nehme ich von einem derselben blindlings einen Theil weg und stecke denselben in meine Tasche, worin ich die Anzahl der Blätter heimlich zähle, indessen ich denselben ersuche, die unterste Karte jedes Haufens zu besehen, und zu den Augen derselben, die darauf liegenden Blätter zu zählen, die so erhaltenen Summen zusammen zu rechnen und mir den Betrag anzugeben. Die Asse werden hiebei für 1 gerechnet, die Bilder für 10, die unbesehenen Blätter für 1.

Um die Augensumme der beiden untersten Blätter zu bestimmen, addire ich nun die Zahl der in die Tasche gesteckten Blätter zu der Angabe und subtrahire 30 davon.

Gesetzt, ich stecke 6 Blätter in die Tasche und man giebt mir die Zahl 38 an, so subtrahire ich 30 von 44 und nenne den Rest 14; welches die Summe der Augen auf den beiden untersten Karten seyn wird, denn das ganze Spiel enthält 32 Blätter, davon werden auf die besagte Art 30 Blätter für 1 gerechnet und die beiden untern für so viel als ihre Augenzahl ausmacht, subtrahirt man von der ganzen Summe also 30, so bleibt diese Anzahl übrig.

Nro. 20. Die Anzahl der Augen zu errathen, die ſich auf mehreren beliebig gewählten Karten eines ganzen Spiels von 52 Karten befinden, die Aſſe für 1 und die Bilder für 10 gerechnet.

Es nimmt Jemand eine Karte aus dem Spiel, beſieht ſie und bedeckt ſie mit ſo viel anderen Karten, bis dieſe mit der bemerkten Augenzahl der erſteren 13 ausmachen. Geſetzt die bemerkte Augenzahl der gewählten Karte ſey 9, ſo bedeckt er ſie alſo mit 4 andern Kartenblättern. Er zieht eine zweite Karte und verfährt eben ſo damit; hat er nun auf dieſe Art ſo viele Haufen gebildet als ihm gefällig war, ſo giebt er mir die noch übrigen Blätter zurück, um hieraus die Summen der verdeckten Augen zu errathen. Ich zähle dieſe Blätter, indem ich zum Schein ihre Figuren und Augen unterſuche, und zähle mit einem Blick auch die Menge der gebildeten Haufen.

1) Sind es nun mehr als 4 Haufen, ſo ſubtrahire ich 4 von ihrer Anzahl, multiplicire den Reſt mit 14, und addire wieder 4 dazu, nebſt der Anzahl der übrig gebliebenen Blätter. Dieſe Summe iſt der geſuchten Anzahl der verdeckten Augen gleich.
2) Sind es nur 4 Haufen, ſo addire ich blos 4 zu der Anzahl der übrig gebliebenen Blätter, um das Verlangte zu finden. Will man alſo die Mühe einer Multiplication vermeiden, ſo darf man auf die obige Art nur nicht mehr als 4 Haufen bilden laſſen.
3) Sind es nur 3 Haufen ſo ſubtrahire ich 10 von den übrigen Blättern;
4) ſind es 2 Haufen, ſo ſubtrahire ich 24 von den übrigen, und iſt es

5) nur 1 Haufen, so subtrahire ich 38 von den übrigen Blättern.

Die Richtigkeit dieser Vorschrift beruht auf den folgenden Bemerkungen.

Ist es nur Ein Haufen, so können wenigsten 39 Blätter übrig bleiben, denn wenn dieser mit einem Aß angefangen wird, so nimmt er 13 Blätter weg, und es bleiben demnach 39 von 52 Blättern übrig. Sind nun 39 Blätter übrig geblieben, so weiß ich also, das ein Aß zum Grund liegt, und 38 von 39 abgezogen, läßt 1 oder ein Aß zum Rest.

Ist der Haufen mit 2 Augen angefangen worden, so bleiben 40 Blätter übrig, und 38 von 40 abgezogen, läßt 2 zum Rest. Ist so fort der Haufen mit 10 Augen angefangen worden, so bleiben 48 Blätter übrig, und 38 von 48 läßt 10 zum Rest. —

Sind es 2 Haufen, so können wenigstens 26 Blätter übrig bleiben, und hierauf gründet sich nun ebenso der Abzug von 24.

Sind es 3 Haufen, so ist 13 die geringstmögliche Zahl der übrigen Blätter, und hierauf gründet sich der Abzug von 10.

Mit 4 Haufen, wobei die 4 Asse zum Grund liegen, wird das ganze Spiel von 52 Blättern aufgeräumt, so viel Blätter übrig bleiben, so viel Augen müssen über 4 zum Grund liegen.

Um das ganze Spiel mit 5 Haufen aufzuräumen, muß man 3 Asse, einen Fünfer und einen Zehner zum Grund legen, folglich in Allem 18 Augen, oder 14 + 4, denn wurde es mit 4 Haufen aufgeräumt, so muß man ein Aß in einen Fünfer umtauschen, wodurch 4 Blätter übrig bleiben, womit man einen neuen Haufen, bis auf

13 zählend, machen kann, wenn man einen Zehner dabei zum Grund legt.

Eben so findet man, daß man, um das ganze Spiel mit 6 bis 13 Haufen aufzuräumen, succeſſive 14 Augen mehr zum Grund legen müſſe, woraus denn die Urſache der 1ſten Regel erhellt*).

Anmerkung.

Um daſſelbe Künſtchen mit einem Piquetſpiel auszuführen, wobei das Aß für 11 und jedes Bild für 10 gerechnet wird, läßt man 3 Karten ziehen und auf jede ſo viel Blätter legen, bis dieſe mit der Augenzahl der gezogenen Karte 15 ausmachen, und ſich die übrigen Blätter zurückgeben. Addirt man 16 dazu, ſo hat man die Summe der verdeckten Augen; denn die geringſte Summe derſelben iſt 21, weil das Aß jetzt für 11 gerechnet wird, und dabei bleiben 5 Blätter übrig; man muß nun 16 zu 5 addiren um die geringſte Summe 21 zu erhalten. Iſt die Summe 22, ſo bleiben 6 Blätter übrig, wozu man wieder 16 addiren muß, damit die Summe heraus kommt, u. ſ. w.

Nro. 21. Die gedachte Karte zu finden.

Ich lege etwa 6 bis 10 Karten nach einander auf den Tiſch, indem ich ſie der Geſellſchaft vorzähle und ihre Figuren ſehen laſſe, ohne ſie ſelbſt zu beſehen. Ich lade einen der Zuſchauer ein, von dieſen 10 Karten eine mit ihrer Nummer im Sinn zu behalten; hierauf lege ich dieſe 10 Karten oben auf das Spiel, ich hebe ab, aber

*) Dieſe artige Rechnungs-Aufgabe findet ſich in den Récréations physiques et mathématiques par Guyot, ohne den Grund der Auflöſungs-Vorſchrift. Der Herausgeber wurde in früheren Jahren darum befragt und hierdurch mit dem genannten Werke und der darin vorgetragenen Theorie der Taſchenſpielerkünſte bekannt, worunter in der That viele dem Witz der Erfinder zur Ehre gereichen.

tief genug, damit sie nicht von einander getrennt werden, und frage nun den Zuschauer, welche Nummer er in den Sinn genommen habe.

Gesetzt er sage die 7te, so subtrahire ich 7 von 11 = 10 + 1 und merke den Rest 4. Nun muß ich gleich Anfangs die unterste Karte des Spiels gemerkt haben, denn die gewählte Karte wird als die 4te darauf folgen, wenn ich die Karten jetzt nach einander vom Spiel ziehe und aufgedeckt vorlege, welches mit Geläufigkeit geschehen muß; ich lasse dann zum Schein noch einige folgen, nehme die bemerkte Karte und überreiche sie dem Zuschauer, der sie gewählt hat, als die seinige. Der Grund des Erfolgs ist leicht einzusehen, denn, weil die erste der gezählten Karten beim Auflegen zur Untersten derselben ward, so wird die letzte zur ersten, die vorletzte zur zweiten u. s. w., wenn sie zum zweitenmal gezählt werden.

Nro. 22. Das gewählte Kartenpaar.

Ich lasse Jemand 6 beliebige Karten aus einem Piquetspiel ziehen, von diesen dann 2 beliebige Karten ziehen, solche besehen, alsdann unter die 4 übrigen beliebig einstecken, und darauf wieder auf das Spiel legen.

Oben dürfen sie nicht bleiben, sonst wäre es eine schlechte Kunst, spreche ich, indem ich das Spiel auffasse, und nach einander von unten, einen Theil nach der Ordnung der Buchstaben a c e d b, mit Ausnahme des mittleren e, auf den Tisch fallen lasse; wir wollen sie durchaus mit dem Spiel vermischen.

Von d ziehe ich nun 2 Blätter weg, und lege sie auf die Mitte e. Hierauf nehme ich mit der Linken den Theil a und lege ihn auf die 2 mittlern Blätter, dann ergreife ich b mit der Rechten und lege ihn auf a, nun

wieder c mit der Linken, um ihn auf b zu legen und auf dieſen lege ich zuletzt auch den Theil d. Ich nehme das Spiel wieder auf und verfahre wieder eben ſo damit: und um die Karten noch beſſer durch einander zu miſchen, wiederhole ich dieſe Umlegung zum drittenmal. Hierdurch werden die betroffenen 6 Karten zuſammen unter das Spiel gebracht, indem ſie durch daſſelbe zerſtreut zu ſeyn ſcheinen, wenn man es mit Geläufigkeit gethan hat.

Jetzt lege ich das Spiel in 8 Reihen zu 4 Blätter auf, und zwar aufgedeckt und nach der folgenden Weiſe wobei die arithmetiſche Reihe der Zahlen

2, 7, 12, 17, 22, 27,

wovon jede um 5 größer als die vorhergehende iſt, mir zur Richtſchnur dient. Ich zähle nämlich die Blätter von oben herunter, komme ich aber an eine dieſer Zahlen, ſo nehme ich ein Blatt von unten dafür.

Hierdurch fallen die 6 Blätter auf die mit den Puncten bezeichneten Stellen der folgenden Tafel; laſſe ich mir nun die Reihen zeigen, worin die gedachten 2 Karten liegen, ſo kann ich ſie hiernach angeben.

In der erſten Reihe liegt nämlich die Karte in der zweiten Stelle, die ich anzugeben habe; in der zweiten Reihe wäre es die dritte Karte, u. ſ. w.

I.	1	2 .	3	4
II.	5	6	7 . .	8 .
III.	9	10	11	12 . . .
IV.	13	14	15	16
V.	17 . .	18	19	20
VI.	21	22 . . .	23	24
VII.	25 .	26	27 .	28
VIII.	29	30	31	32

Anmerkung.

Läßt man 3 Paar Karten durch 3 Personen ziehen, und von jeder das gezogene Paar oben aufs Spiel legen, so kann man, nachdem man dasselbe eben so wie im ersten Fall behandelt und ausgelegt hat, einem jeden sein Karten-Paar zeigen, wenn er auch nur eine Reihe angiebt, worin er eine seiner Karten sieht, denn in diesem Fall gehören die in der 2ten und 27ten 7ten und 17ten 12ten und 22ten Stelle liegenden Karten paarweise zusammen, welches durch die gleiche Anzahl der Puncte in der obigen Tafel angedeutet wird.

Nro. 23. Eine gedachte Zahl durch eine vorgeschriebene Berechnung zu errathen.

Man läßt die gedachte Zahl verdoppeln, das Ergebniß mit 3 multipliciren, zu diesem Product die gedachte Zahl addiren, die Summe mit 5 multipliciren, zu diesem Product die gedachte wieder addiren und nun die Summe halbiren. In die Hälfte läßt man mit der gedachten Zahl dividiren, und zu dem Quotient die gedachte Zahl addiren. Man fragt nun wie die Rechnung stehe, subtrahirt in Gedanken 18 von der Angabe und nennt den Rest als die gedachte Zahl. — Daß dieser Erfolg in allen Fällen statt finden müsse, ist leicht einzusehen. Durch die beiden ersten Multiplicationen mit 2 und 3, und durch die Addition, wird die gedachte Zahl auf das Siebenfache gebracht, durch die folgende Multiplication mit 5, auf das 35malige, und nach der Addition derselben, hat man sie 36mal genommen. Wird dieses Ergebniß halbirt, so hat man sie nur noch 18mal; und in das 18malige, geht sie 18mal, also erhält man den Quotient 18. Zu diesem wird nun zu-

letzt die gedachte Zahl wieder addirt, und aus der angegebenen Summe muß sie dann natürlich hervorgehen, wenn man die 18 davon abzieht. —

Anmerkung.

Denkt man sich die gewählte Zahl unter dem Buchstaben a, so ist 2 a das Doppelte. Dieses mit 3 multiplicirt, giebt 6 a, hierzu wieder a addirt, giebt 7 a, dieses mit 5 multiplicirt giebt 35 a, hierzu a addirt, giebt 36 a; die Hälfte davon ist 18 a; dividirt man mit a in 18 a, so kommt 18 heraus, und addirt man wieder a zu dem Quotient 18, so ist die Summe 18 + a, und es bleibt a übrig, wenn man die 18 abzieht.

Dieß dient zu einem beiläufigen Begriff von dem vortheilhaften Gebrauch der Buchstaben zum Rechnen, so wie zur Einsicht, daß die Buchstabenrechnung keineswegs so schwer ist, als man sich dieselbe vorzustellen pflegt.

Nro. 24. Die künstlichen Brüche.

Es giebt eine Art Brüche, welche die Eigenschaft haben, daß man den Werth jedes gegebenen Bruchs damit heraus bringt, wenn man den gegebenen Bruch damit multiplicirt, und den Zähler des gegebenen Bruchs zu dem Zähler des Productes addirt, oder den Nenner des erstern von dem Nenner des letztern subtrahirt. Wie müssen diese Brüche beschaffen seyn?

Antwort. Die Nenner derselben müssen nur um 1 größer als die Zähler seyn.

Ein solcher ist z. B. der Bruch $\frac{3}{10}$. Würde nun der Bruch $\frac{2}{3}$ gegeben, so wäre das Product $\frac{6}{10}$. Addirt man 3 zu dem Zähler 27, so kommt $\frac{30}{10} = \frac{3}{1}$ heraus, oder subtrahirt man 8 von dem Nenner 80, so kommt wieder $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ heraus.

ist in diesem Fall ein Vielfaches oder ein Product der 9, und zieht man das kleinere von dem größeren ab, so behält man also 9, oder ein Product der 9 zum Rest.

Ist die Zahl kein Vielfaches der 9, so ist auch ihre Ziffernsumme kein solches oder keine 9, allein so viel sie von 9 verschieden ist, so viel bleibt sie auch bei jeder Versetzung der Ziffern davon verschieden, und dieß muß sich nothwendig bei der Subtraction gegen einander aufheben. So ist z. B. 724 soviel als 720 u. 4, soviel als 80mal 9 u. 4, u. d. Versetzung 472, soviel als 468 u. 4, soviel als 52mal 9 u. 4 u. nach der Subtraction bleit 252, oder soviel als 28mal 9. übrig, indem die 4 gegen die 4 aufgeht.

Nro. 27. Eigenschaft der Zahl 3.

Woher kommt es, daß von jeden zwei Zahlen, entweder die Summe, die Differenz oder das Product durch 3 theilbar ist?

Antw. Die Division durch 3, läßt entweder Null, oder 1 oder 2 zum Rest: sind nun

1. die beiden gegebenen Zahlen Producte von 3, so ist die Folge von selbst klar, lassen aber
2. beide Zahlen zugleich 1 oder 2 zum Rest, so hebt sich derselbe bei der Subtraction gegen einander auf. Zum Beispiel

von	$10 = 9 + 1$	von	$11 = 9 + 2$
abgezogen	$7 = 6 + 1$	abgezogen	$8 = 6 + 2$
bleibt	3	bleibt	3

3. läßt die eine 2 und die andere 1 zum Rest, so ergänzen sich diese Reste durch die Summation zu 3. Zum Beispiel es ist

$$11 = 9 + 2$$
$$7 = 6 + 1$$
$$\text{Summe } 18 = 15 + 3$$

ihn auf die Zahl 9 oder ein Vielfaches derselben, und dieses bleibt nach der Multiplication mit jeder beliebigen Ziffer immer ein Vielfaches der 9, dessen Ziffersumme wieder 9 ausmachen muß. Was daran fehlt kann also nichts anders als die ausgestrichene Ziffer seyn.

Man wählt zum Beispiel die Zahl . . . 2864
und bildet hieraus durch Versetzung die Zahl 2648

so ist der Unterschied 216

wird dieser mit der beliebigen Zahl 6 multiplicirt, so entsteht das Product 1296, und wird hievon die Ziffer 2 ausgestrichen, so wird 196 die Angabe seyn. Die Ziffernsumme von 196 ist 16, und von dieser ist 7 die Ziffernsumme. Subtrahirt man nun 7 von 9, so kommt die ausgestrichene Ziffer 2 heraus.

Anmerkung.

Der Fall würde indessen zweideutig seyn, wenn die ausgestrichene Ziffer selbst 9 oder eine Null wäre, weil die Ziffernsumme der angeblichen Zahl alsdann sich auch auf 9 reduzirte. In diesem Fall, nenne ich 9 als die am wahrscheinlichsten ausgestrichene Ziffer, und treffe ich es nicht damit, so sage ich, ja, ich habe mich um 1 geirrt, 9 und 1 macht 10, Sie haben die Null ausgestrichen.

Nro. 26. Woher kommt es, daß der Unterschied zweier Zahlen, die mit denselben Ziffern, nur in verschiedener Ordnung geschrieben werden, beständig 9 oder ein Vielfaches der 9 ist?

Antwort. Macht die Ziffersumme einer Zahl 9 aus, so bleibt sie 9, wie sie auch immer versetzt werden mögen. Jede der beiden daraus gebildeten Zahlen

ist in diesem Fall ein Vielfaches oder ein Product der 9, und zieht man das kleinere von dem größeren ab, so behält man also 9, oder ein Product der 9 zum Rest.

Ist die Zahl kein Vielfaches der 9, so ist auch ihre Ziffernsumme kein solches oder keine 9, allein so viel sie von 9 verschieden ist, so viel bleibt sie auch bei jeder Versetzung der Ziffern davon verschieden, und dieß muß sich nothwendig bei der Subtraction gegen einander aufheben. So ist z. B. 724 soviel als 720 u. 4, soviel als 80mal 9 u. 4, u. d. Versetzung 472, soviel als 468 u. 4, soviel als 52mal 9 u. 4 u. nach der Subtraction bleit 252, oder soviel als 28mal 9. übrig, indem die 4 gegen die 4 aufgeht.

Nro. 27. Eigenschaft der Zahl 3.

Woher kommt es, daß von jeden zwei Zahlen, entweder die Summe, die Differenz oder das Product durch 3 theilbar ist?

Antw. Die Division durch 3, läßt entweder Null, oder 1 oder 2 zum Rest: sind nun

1. die beiden gegebenen Zahlen Producte von 3, so ist die Folge von selbst klar, lassen aber
2. beide Zahlen zugleich 1 oder 2 zum Rest, so hebt sich derselbe bei der Subtraction gegen einander auf. Zum Beispiel

von	$10 = 9 + 1$	von	$11 = 9 + 2$
abgezogen	$7 = 6 + 1$	abgezogen	$8 = 6 + 2$
bleibt	3	bleibt	3

3. läßt die eine 2 und die andere 1 zum Rest, so ergänzen sich diese Reste durch die Summation zu 3. Zum Beispiel es ist

$$11 = 9 + 2$$
$$7 = 6 + 1$$
$$\text{Summe } 18 = 15 + 3$$

Nro. 28. Eine unbekannte Zahl zu finden, zur Veränderung von Nro. 13.

Es schreibt Jemand eine Zahl im Geheimen auf. Diese läßt man ihn in 2 Theile zerlegen, wovon der eine um 1 größer als der andere sey, und hiernach jeden Theil mit sich selbst multipliciren, 11 zu dem größern addiren, von der Summe das kleinere Produkt subtrahiren, und den Rest angeben. —

Von diesem darf man in Gedanken nur 11 subtrahiren, um die unbekannte Zahl zu erhalten. Es sei z. B. 12 die gewählte Zahl, so sind die Theile $5\frac{1}{2}$ und $6\frac{1}{2}$ um 1 verschieden; $6\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2} = 42\frac{1}{4}$ hierzu 11, giebt $53\frac{1}{4}$ davon abgezogen $5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$ . . . . . $= 30\frac{1}{4}$

Rest	23
und hievon abgezogen .	11
so kommt die gewählte Zahl .	12

heraus.

Um den Bruch zu vermeiden, darf man nur eine ungerade Zahl schreiben.

Worauf beruht nun diese Auflösung?

Antw. Auf der Bemerkung in Nro. 13, daß die Differenz zweier Quadratzahlen, deren Wurzeln nur um 1 verschieden sind, die Summe der beiden Wurzeln ausmacht.

Nro. 29. Die 3 Kostgänger.

Ich lege einen Haufen von 18 Karten auf den Tisch und daneben einen König, eine Dame und einen Buben; dann wende ich mich zu drei Personen aus der Gesellschaft, und gebe der ersten eine Karte in die Hand, der zweiten 2, und der dritten 3. Hier, sage ich ihnen, habe

ich eine Reisegesellschaft, die ich Sie zu beherbergen bitte, wer den König aufnimmt, der zieht von diesem Haufen 4 mal so viel Blätter ab, als ich ihn auf abschlägige Zahlung schon gegeben habe; für die Dame nimmt er aber nur 2mal so viel Blätter, und für den Buben nur einmal so viel. Ich entferne mich unterdessen, und wenn ich zurück komme, so nehme ich die von dem Haufen übrig gebliebenen Karten, und zähle sie, indem ich zum Schein ihre Figuren untersuche; denn dieser Rest setzt mich in Stand einer jeden Person die Karte anzugeben, die sie aufgenommen hat. Hierzu dient das folgende kleine Täfelchen, das ich unter den Karten in der Hand verborgen halte.

Reste.	Personen.		
	I.	II.	III.
1	a	e	i
2	e	a	i
3	a	i	e
5	e	i	a
6	i	a	e
7	i	e	a

Die römischen Zahlen deuten auf die Personen, welche, je nach der Zahl der Reste, entweder

den Diener a
die Dame e
den König i

aufgenommen haben.

War z. B. 6 der Rest, so zeigt die Tafel, daß die I. Person den König i genommen hat;

II. . den Diener a,
III. . die Dame e.

Der Grund dieses Erfolgs liegt in den 6 Versetzungen, oder Permutationen, worin die 3 Gegenstände gebracht werden können. Je nachdem nun diese, durch a, e, i, hier bezeichnete Gegenstände versetzt werden, so dienen sie als Factoren zur Multiplication der gegebenen Blätter, nach deren Product die Karten vom Haufen gegriffen werden; der Gegenstand i stellt den Factor 4 vor, e den Factor 2 und a den Factor 1, und hiernach bilden sich die Reste, wie aus der folgenden Tafel ersichtlich.

1×a= 1	1×a= 1	1×e= 2
2×e= 4	2×i= 8	2×a= 2
3×i=12	3×e= 6	3×i=12
17	15	16

18–17=1 18–15=3 18–16=2.

1×e= 2	1×i= 4	1×i= 4
2×i= 8	2×a= 2	2×e= 4
3×a= 3	3×e= 6	3×e= 3
13	12	11

18–13=5 18–12=6 18–11=7.

Nro. 30. Uiber den Begriff von der Größe einer Billion.

Mehrere große Zahlenresultate führen zu der natürlichen Frage: wie lang man wohl in einem fort zählen müßte, um bis auf eine Billion zu kommen, wenn man der Erfahrung gemäß eine Minute braucht, um von 1 bis 100 zu zählen?

Die Antwort, daß man über 19000 Jahre, Tag und Nacht in einem fort zählen müßte, würde unglaublich seyn, wenn man sie nicht durch eine unfehlbare Berechnung behaupten könnte.

Kommt man in einer Minute auf 100, so kommt man in einer Stunde von 60 Minuten auf 6000, folglich

in einem Tag von 24 Stunden auf 144000, in einer Woche von 7 Tagen auf 1,003,060, in einem Jahr von 52 Wochen auf 52,416,000 und in 19000 Jahren auf 995,903,000,000, welches noch keine volle Billion ausmacht, und hierbei müßte man noch, was doch nicht seyn kann, die größern Zahlen, eben so geschwind, wie die kleinern aussprechen können.

Nro. 31. Die Permutationen des Schachspiels.

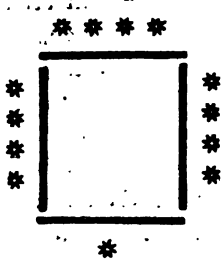
So groß die Menge der möglichen Versetzungen der 24 Buchstaben des Alphabets auch ist *), so kommt sie doch noch in gar keine Vergleichung mit der ungeheuren Anzahl der verschiedenen Stellungen, die man den Figuren auf dem Schachbret geben könnte. Auf den 64 Feldern des Schachbrets werden 32 Figuren aufgestellt. Um alle mögliche Züge zu berechnen, muß man daher vorerst die möglichen Versetzungen von 64 Stellen suchen, und diese dann noch mit 32 multipliciren. So kommt man denn auf eine Zahl die über 1124 Quatuordezillionen steigt, und mit 88 Ziffern gebildet wird.

Wenn nun das Aufschreiben der möglichen Versetzungen von 24 Buchstaben schon einen so ungeheuren Aufwand von Zeit und Arbeit erfordert, in wie viel Tausend Millionen Jahren würde man mit der Einrichtung eines Schachspiel-Automats wohl fertig werden, der allen möglichen Zügen entsprechen, und allein vermög seines Triebwerks begegnen könnte? Der Kempelische Automat, dem man dieses Wunderwerk eine Zeitlang zutraute, machte dem Erfinder doch immer noch wegen der fein verdeckten Täuschung Ehre.

*) Wie wir bereits in dem Buch der Zauberei es gezeigt haben.

Nro. 32. Permutationen von 10 Personen, oder die 10 Gäste, und einige Beispiele scheinbarer Permutations-Aufgaben.

1) Zu einem Beispiel, wie außerordentlich schnell die Producte der Factoren nach der natürlichen Folge der Zahlen anwachsen, darf man nur die Frage aufstellen, wie oft man eine Gesellschaft von 10 Personen zu Mittag speisen müßte, bis sie ihre Plätze am Tisch auf alle mögliche Arten unter einander gewechselt hätten? Hierzu müßte der Tisch 3,628,800mal gedeckt werden, und es würden 9935 Jahre zu 365¼ Tage, und noch 165 Tage darüber verfließen.



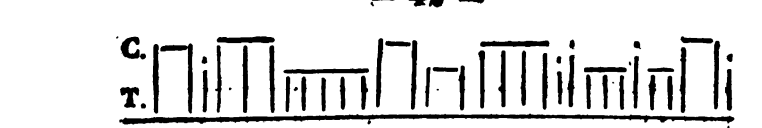
2) Es tranken 12 lustige Gesellen in einem Wirthshaus tapfer drauf los, ohne einen Heller Geld zu haben, so erzählt ein altes Rechenbuch, dem die Geschichte noch immer nacherzählt wird. Als der Wirth vor den Tisch trat und die Zeche forderte, wollte jeder den Freigebigen spielen und die Zeche für die übrigen zahlen; da aber der Streit kein Ende nehmen wollte, ließ der Wirth den klugen Anschlag hören, sie möchten nur der Reihe nach am Tisch herum zählen, den siebenten Mann jedesmal abtreten und den letzten für Alle bezahlen lassen. Sie benutzten den guten Rath auch, und so geschickt, daß dem Wirth, den sie mitzählten, diese Ehre selbst zu

Theil fiel, indem sie das Zählen mit dem fünften Mann vor ihm links anfingen. Woher nahm der alte Rechenmeister die Geduld, alle mögliche Zählarten hierzu durch zu gehen, um die zweckdienliche heraus zu heben? Die Geduld war nicht so groß, als man nach der vorgehenden Rechnung denken könnte; denn da die Gäste ihre Plätze nicht wechselten, so konnte der Wirth nur 13 verschiedene Plätze unter ihnen einnehmen, und selbst mit dieser Anzahl war es nicht einmal nöthig, die Probe zu machen; er durfte nur 11 Puncte ansetzen, mit dem ersten das Zählen anfangen, den 7ten jedesmal durchstreichen, so ergab sich sogleich mit dem übrigen Puncte, die Stelle für den Wirth, und für denjenigen, womit das Zählen anfangen mußte.

3) Dieselbe Bewandtniß hat es auch mit dem folgenden Stückchen. Die Mannschaft auf einem Schiff, das Hungersnoth zu leiden anfing, wurde nach dem Beschluß, daß die eine Hälfte der andern das Leben fristen solle, von dem Capitain in eine Reihe aufgestellt, und der 10te Mann beim Uiberzählen jedesmal gezwungen über Bord zu springen, bis nur noch die Hälfte übrig war. Es waren 15 Christen und 15 Türken, wie konnte der Capitain sie stellen um die ersten beim Leben zu erhalten? Ditß mußte nach der folgenden Ordnung geschehen, die man, um sie im Gedächtniß zu behalten, mit den Vocalen a, e, i, o, u des darunter geschriebenen Verses bezeichnet hat, worin die Zahlen von 1 bis 5 durch die Vocale der Folge nach angedeutet werden.

Christen.	Türken.	C.	T.	C.	T.	C.	T.	C.	T.	C.	T.	C.	T.
2	1	3	5	2	2	4	1	1	3	1	2	2	1
Hex		Pa-	phi	Cum	Gen-	te	Ba-	na	Dat	Sig	na	Se	re-	na

Man darf aber nur 30 Kreidestriche machen, bei dem ersten zu zählen anfangen, und den 10ten jedesmal halb auslöschen, um diese Ordnung gleich zu übersehen:



und so kann man ohne Mühe auch andere Beispiele dieser Art anordnen.

Nro. 33. Was ist wahrscheinlicher, Grad oder Ungrad?

Es greift Einer blindlings in einen Haufen ungezählter Geldstücke, auf Grad oder Ungrad; werde ich besser thun Grad zu sprechen oder auf Ungrad zu halten?

Nach der gemeinen Ansicht hätte ich nicht mehr Grund für das eine als für das andere, und ich dürfte 1 gegen 1 wetten, daß ich es mit Grad sowohl, als mit Ungrad treffen könnte. Zur genaueren Untersuchung wollen wir vorerst den Fall setzen, der Haufen bestünde aus einer ungeraden Anzahl von Stücken, z. B. aus 3. Alsdann könnte man die ungraden Zahlen 1, 3 und 5 und nur die beiden graden Zahlen 2 und 4 daraus greifen; bestände er aber aus der graden Anzahl 4, so könnte man nicht mehr grade als ungrade Zahlen daraus greifen, nämlich entweder 2 und 4 oder 1 und 3.

Ich werde also schon deswegen sicherer gehen, wenn ich auf Ungrad als wenn ich auf Grad halte. Allein es kommt offenbar nicht sowohl darauf an, wie viel verschied'ne ungrade oder grade Zahlen, mit den Geldstücken des vorliegenden Haufens gebildet werden können, sondern auf wie vielerlei Arten man eine grade oder ungrade Verbindung von Stücken daraus greifen kann. Nehmen wir nun der Kürze wegen an, der Haufen bestünde aus 4 verschiedenen Stücken a, b, c, d, so kann man eins jedes derselben einzeln greifen, welches denn 4 ungrade

Fälle darbietet. Man kann ferner die folgenden 4 Verbindungen zu 3 und 3 daraus greifen, nämlich abc, abd, acd, bcd, welches denn zusammen 8 ungrade Fälle ausmacht. Dagegen sind hier nur Sechs grade Verbindungen ab, ac, ad, bc, bd, cd, zu 2 und 2 und eine zu 4, nämlich abcd möglich, es bieten sich also nur 7 grade gegen 8 ungrade Fälle dar.

Untersucht man eben so die möglichen Verbindungen von 5 Stücken a, b, c, d, e mit einander, so zeigen sich vorerst die

5 ungraden Fälle der einzelnen Stücke, alsdann
10 " = nach den Verbindungen zu 3 und 3, und
1 ungrader Fall, wegen der Verbind. abcde zu 5 in allem

also 16 ungrade Fälle. Dagegen findet man

10 grade Verbindungen zu 2 und 2 .....
5 " " zu 4 und 4, in allem

also 15 grade Fälle; folglich wieder nur 15 grade gegen 16 ungrade Fälle.

Könnte man nun, wie es sich schon vermuthen läßt, auf denselben Erfolg, bei jeder vorliegenden graden oder ungraden Anzahl von Stücken rechnen, so würde die überwiegende Wahrscheinlichkeit des ungraden Falls erwiesen seyn.

Nro. 34. Wahrscheinlichkeitsberechnung beim Würfelspiel.

a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

1) Mit 2 Würfeln a und b können 36 verschiedene Würfe fallen, denn jede der 6 Seiten des Würfels a kann mit jeder der 6 Seiten des Würfels b zum Vorschein kommen, wie obenstehende Tafel zeigt.

2) Mit 3 Würfeln wird die Anzahl noch 6 mal so groß, weil jede der 6 Seiten des dritten Würfels mit den 36 verschiedenen Fällen zweier Würfel verbunden zum Vorschein kommen kann, wodurch also $6^3 = 6.6.6 =$ 216 verschiedene Verbindungen entstehen.

3) Da die Anzahl der möglichen Würfe hiernach mit jedem weiter dazu kommenden Würfel 6 mal größer wird, so findet man dieselbe in jedem Fall durch das Product, wozu die Zahl 6 so vielmal als Factor genommen wird, als Würfel genommen werden. Für 7 Würfel z. B. ist die Anzahl der möglichen Würfe $= 6^7 =$ 279936.

4) Die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter Wurf unter den 36 möglichen Würfen mit 2 Würfeln getroffen werde, wie z. B., daß der Würfel a mit 5 und b mit 2 falle, ist also $\frac{1}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeit aber, daß man entweder 5 oder 2 mit a, und 2 oder 5 mit b werfen werde, ist $\frac{2}{36}$,

und sie wäre $\frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$, daß man überhaupt die Summe 7 dieser Zahlen treffen könne; indem die Zahl 7 auf sechserlei Arten aus den Zahlen von 1 bis 6 entstehen kann, wie die folgenden gegen einander laufenden Reihen noch insbesondere zeigen.

a	1	2	3	4	5	6
b	6	5	4	3	2	1

Für die Zahlen 6 und 8, die, wie die folgenden Reihen zeigen, nur auf fünferlei Arten entstehen können, ist die Wahrscheinlichkeit nur $\frac{5}{36}$, und sie wird immer geringer, so wie die bestimmte Zahl sich, auf- oder abwärts, von dem arithmetischen Mittel der höchsten und niedrigsten Zahl entfernt, die mit 2 Würfeln getroffen werden kann.

a.	1	2	3	4	5
b.	5	4	3	2	1

a.	2	3	4	5	6
b.	6	5	4	3	2

Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit für die Zahl

2 = 1 Sechs- und Dreißigstel
3 = 2 " " "
4 = 3 " " "
5 = 4 " " "
6 = 5 " " "
7 = 6 " " "
8 = 5 " " "
9 = 4 " " "
10 = 3 " " "
11 = 2 " " "
12 = 1 " " "

Summe = $\frac{36}{36}$ = 1.

Von dieser Berechnung wird unter andern beim Trictrac-Spiel eine Anwendung gemacht, wo es darauf ankommt, die Felder zuerst zu besetzen, wozu diejenigen Würfe berechtigen, die mit 2 Würfeln am seltesten vorkommen.

5) Bei jeder Anzahl von Würfeln, ist es eben so wie bei 2 Würfeln, das arithmetische Mittel der höchsten und niedrigsten Zahl, welches am häufigsten geworfen wird, und die Wahrscheinlichkeit für jede andere Zahl wird desto geringer, je weiter sie sich von dem arithmetischen Mittel entfernt.

6) Ist die Anzahl der Würfeln ungrad, so sind es die beiden mittleren Zahlen, die gleichweit von der höchsten und niedrigsten Zahl abstehen, welche am meisten vorkommen. So zum Beispiel 10 und 11 bei 3 Würfeln, wo 3 die niedrigste und 18 die höchste ist, die man werfen kann. Da sie auf 27erlei Arten entstehen, und 6 verschiedene Würfe gemacht werden können, so ist die Wahrscheinlichkeit also $\frac{27}{216}$ für jede derselben. Mit 7 Würfeln giebt es, wie in 3) berechnet, 279936 verschiedene Würfe, und jede der beiden mittleren Zahlen 24 und 25 kann auf 24017erlei Arten entstehen.

Für die Zahlen 23 u. 26 giebt es dabei nur 22967 Combinat.

Für	22	27	=	20993	=
=	21	28	=	18327	=
=	20	29	=	15267	=
=	19	30	=	12117	=
=	18	31	=	9142	=
=	17	32	=	6538	=
=	16	33	=	4417	=
=	15	34	=	2807	=
=	14	35	=	1667	=
=	13	36	=	917	=

Für	12 - 37	"	462 Combinat.
"	11 - 38	"	210 "
"	10 - 39	"	84 "
"	9 - 40	"	28 "
"	8 - 41	"	7 "
"	7 - 42	"	1 "

Man beſchuldigt die Spieler, die auf Märkten und Kirchweihen offene Bank halten, und mit 6, 7 und 8 Würfeln auf lockende Preiſe gegen einen geringen Einſatz werfen laſſen, daß ſie falſche Würfel führen. Nach der obigen Rechnung bedürfen ſie dieſer gefährlichen Betrügerei aber nicht, um die unwiſſenden Glückſucher um ihr Geld zu prellen, ſie hüten ſich nur die Zahlen mit Preiſen zu beſetzen, die noch einige Hoffnung zum Gewinnen übrig laſſen.

Nro. 35. Uiber den richtigen Anſchlag des Preiſes beim Wetten, oder die rechtmäßige Wette.

Die Gründe der Wahrſcheinlichkeitsberechnung waren noch nicht entwickelt, als man ſchon über die Billigkeit einverſtanden war, daß der Gewinn bei jeder Wette der Gefahr des Verlierens angemeſſen, und nach dem Verhältniß der günſtigen und ungünſtigen Fälle dafür feſtgeſetzt werden müſſe. In dieſem Fall iſt die Wette pari oder rechtmäßig, und hiernach ſoll z. B. derjenige welcher darauf wettet eine beſtimmte der 6 Nummern eines Würfels zu treffen, nur den ſechsten Theil des darauf geſetzten Preiſes zahlen, oder 1 gegen 5 einlegen, weil er unter den 6 möglichen Würfeln nur Einen für ſich, und der Gegner deren 5 für ſich hat. Um ſich vollkommen von der Richtigkeit dieſes Schluſſes zu über-

zeugen, darf man nur 6 Spieler annehmen, wovon jeder eine der 6 Nummern wählt, und derjenige die Einlagen zieht, deſſen Nummer heraus kommt. Hier iſt kein Grund vorhanden, daß einer mehr als der andere einlegen ſollte, da jeder die gleiche Gefahr läuft. Uibernimmt alſo Einer das Spiel für Fünf Spieler, ſo hat er natürlicherweiſe auch die Einlagen für dieſelben zu machen, das iſt 5 mal ſo viel als der Gegner, oder grad ſo viel Einlagen, als er günſtige Fälle für ſeine Erwartung hat.

Auf eben dieſe Art kann man bei den 36 möglichen Würfen mit 2 Würfeln ſchließen: man kann auch hier annehmen, daß ſie von 36 Spielern beſetzt wären, und die Summe der gleichen Einlagen zum Preis des Gewinns für einen einzigen nehmen. Setzte man aber den Preis auf die Summe der beiden herauskommenden Nummern, ſo hätten alle diejenigen einen gleichen Antheil daran, die auf eine der Combinationen gehalten hätten, welche dieſe Summe ausmachte. Fiele der Preis z. B. auf die Summe 8, ſo müßte er unter 5 Spieler vertheilt werden, weil es 5 Combinationen ſind, welche die Summe 8 ausmachen.

Setzt man nun einen Spieler in die Stelle derjenigen, welche die 5 Combinationen für die Zahl 8 haben könnten, und giebt man die übrigen Combinationen einem einzigen Gegner, ſo iſt es klar, daß man die Einlagen nach dem Verhältniß 5 zu 31 reguliren muß; und hiernach folgt im Allgemeinen, daß die Wette zwiſchen zwei Spielern pari iſt, wenn ihre Einlagen ſich wie die Zufälle verhalten, worauf ſie wetten. Sind die Zufälle für und wider bekannt, und ſetzt man die Einlage des einen Spielers feſt, ſo ergiebt ſich alſo, der Regel Detri gemäß, die Einlage des andern, wenn man die Anzahl der für ihn günſtigen Fälle, mit der Einlage des erſtern multiplicirt.

Nro. 36. Uiber das Lotto von 90 Nummern.

Von den 90 Nummern werden 5 aus dem Glücksrad gezogen und als Treffer bezahlt, je nachdem sie einzeln oder zu Amben, Ternen u. s. w. besetzt wurden.

Da unter 90 Nummern nur 5 Treffer sind, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{90}$, daß eine bestimmte Nummer, ein sogenannter Auszug (eine Externe) getroffen werde, und dafür wird die Einlage nur 15 mal zurückgegeben. Sollte die Wette zwischen dem Spieler und dem Lotto pari seyn, so müßte die Einlage 18 mal bezahlt werden; denn besetzte der Spieler bei dieser Bedingung alle 90 Nummern, so würden die 5 Auszüge ihm die Einlage 90 mal wiederbringen, und es würde auf keiner Seite etwas gewonnen oder verloren werden, wogegen der Vortheil jetzt mit $\frac{3}{90}$ auf der Seite des Lotto liegt. Der bestimmte Auszug, das heißt der Auszug der Nummer in einer bestimmten Stelle von der ersten bis zur fünften, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{90}$, indem es eben so ist, als wenn nur eine von den 90 Nummern gezogen würde, und wird nur 70 mal bezahlt. Das Lotto steht hierbei folglich mit $\frac{20}{90}$ oder $\frac{2}{9}$ im Vortheil gegen den Spieler.

Mit 90 Nummern können $\frac{90 . 89}{1 . 2}$ = 4005 Amben gemacht werden, mit 5 Nummern nur $\frac{5 . 4}{1 . 2}$ = 10; die Wahrscheinlichkeit, daß man eine von denselben treffen werde, ist also $\frac{10}{4005}$.

Die Einlage für eine Ambe müßte demnach 400½ mal, oder für 10 Amben 4005 mal gezogen werden. Das Lotto bezahlt die Ambe aber nur 279 mal, oder die Ein-

lage für 10 Amben 2700 mal, und ſteht hierbei folglich mit $\frac{1305}{4005} = \frac{87}{267}$ im Vortheil.

Auf eine beſtimmte Ambe ſpielen, heißt auf eine der Permutationen zu 2 und 2 ſetzen. Die beſtimmte Ambe 4. 9. wird z. B. gewonnen, wenn die Zahlen 4 und 9 in dieſer Ordnung nach einander herauskommen.

Die 90 Nummern geben, 90. 89 = 8010 ſolcher Permutationen, oder beſtimmte Ambe; die Wahrſcheinlichkeit dafür iſt alſo $\frac{1}{8010}$ und die Einlage dafür wird nur 5100 mal gezahlt, ſo daß das Lotto mit $\frac{291}{801}$ dabei im Vortheil ſteht. Noch höher ſtellt ſich aber der Vortheil des Lottos bei den Ternen, Quaternen und Quinen heraus. Die 90 Nummen geben

$$\frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480 \text{ Ternen},$$

$$\frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 511038 \text{ Quaternen},$$

$$\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43,949268 \text{ Quinen}.$$

Die 5 Nummern geben

$$\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10 \text{ Ternen},$$

$$\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5 \text{ Quaternen},$$

$$\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1 \text{ Quine}.$$

Da nun die Ternen 5500 mal, die Quaternen 75000 mal und die Quinen 100000 mal bezahlt werden, iſt der Vortheil des Lottos $\frac{142}{267}$ bei den Ternen, er geht ſehr

nahe an $\frac{1}{5}$ bei den Quaternen und über $\frac{1}{3}$ bei den Quinen.

Ein so übertriebenes Mißverhältniß zwischen dem Spieler und dem Lotto, setzt in der That voraus, daß die Einlagen sich gleichmäßig über das ganze Spiel vertheilen, und daß keine außerordentliche Unglücksfälle eintreten, die aller Wahrscheinlichkeitsberechnungen spotteten; allein die Erfahrung lehrt, daß selbst die ungewöhnlichen Unglücksfälle sich zum Bewundern genau, und mit der Rechnung im Einklang, auf die Dauer wieder ausgleichen, und ein bedeutendes Uibergewicht auf der Wagschale des Gewinns für das Lotto zurück lassen.

Wenn diese Betrachtung schon gegen ein so ungleiches Spiel abschrecken muß, wie viel thörigter ist es denn nicht, auf Amben und höhere Combinationen zu spielen? da sich 117480 feindliche Zufälle gegen den einzigen, womit man eine Terne machen könnte, aufstellen, und man sich doch nur da, wo die Anzahl der günstigen Zufälle wenigstens um einen größer, als die der gegentheiligen ist, mit der Hoffnung des Gewinns schmeicheln dürfte. Die Erwartung einer Quaterne hat 511038 Fälle gegen sich, und die Hoffnung auf eine Quine, zerfließt unter 44 Millionen mißgünstiger Möglichkeiten vollends in Nichts.

Gesetzt, daß in jedem Monat 8 Ziehungen statt fänden, und daß die sämmtlichen Quaternen hieraus regelmäßig nach einander und ohne Wiederholungen hervorgehen könnten, so würden 5323 Jahre darüber verfließen, und man hätte sogar den Zeitraum von 457804 Jahren nöthig, um die Menge der Quinen so zu erschöpfen.

Diejenigen, welche mit Vortheil gegen das Lotto zu streiten glauben, wenn sie hartnäckig die einzelnen Nummern besetzen, die nach einer Reihe von Ziehungen noch zu erwarten sind, übersehen dabei das schnelle Anwachsen

der Progreſſion, wozu das jedesmalige Erhöhen der Einlage führt, wenn man das Verlorne wieder einholen, und noch etwas gewinnen will. Dem Armen wird es bald an den nöthigen Mitteln dazu gebrechen, und der Begüterte kann auf jede andere und rechtliche Art reicher werden.

Nro. 37. Die Klaſſenlotterie.

Bei der Klaſſenlotterie wird eine große Anzahl von Nummern in mehreren Ziehungen ausgeſpielt, und dazu in Klaſſen vertheilt. Die Anzahl der Looſe muß beträchtlich ſeyn, damit es möglich wird hohe Preiſe darauf zu ſetzen. Um den Spielern den Ankauf zu erleichtern, wird der Verkaufspreis auf alle Klaſſen vertheilt. Um den Abſatz der Looſe für die letzten Klaſſen ſicher zu ſtellen, läßt man die höchſten Preiſe darin gewinnen, und um denſelben noch mehr zu befördern, wird der Verkaufspreis für die Looſe zu den niedrigeren Klaſſen, gegen das was man dafür zu erwarten hat, höher angeſchlagen als bei den letzten Klaſſen, wodurch es möglich wird, dieſe unter dem Werth zu geben, den ſie nach Verhältniß des wahrſcheinlicheren Gewinns beſitzen. Setzte man denſelben niedriger für die erſte Klaſſe an, ſo würden zwar anfänglich mehr Looſe abgeſetzt, aber viele für die letzten Klaſſen nicht fortgeſetzt, oder wie man ſagt nicht renovirt werden, und die noch übrigen zum Theil liegen bleiben können.

Dieſe Anſtalten werden nicht blos des öffentlichen Vertrauens wegen, ſondern auch als Mittel die Staatseinkünfte durch freiwillige Beiträge zu mehren, nur für Rechnung der Staatskaſſen errichtet. Der Ertrag der Treffer wird mit der Einnahme genau ausgeglichen; zur Beſtreitung der Adminiſtrationskoſten, und des bezweckten Vortheils aber, welcher den Mitgliedern des Staats wieder in

der Erleichterung der Abgaben zu gut kommen soll, werden bestimmte Procente von den Preisen abgezogen. Nur sind auch hier noch immer diejenigen darunter zu bedauern, die leichsinnig genug sind, ihre Hoffnungen mehr auf den so höchst unwahrscheinlichen Gewinn eines bedeutenden Preises, als auf den sicheren Gewinn der Arbeit und des Fleißes zu setzen, oder gar durch unmäßiges Spielen sich ins Verderben zu stürzen.

Zum Beispiel der Einrichtung einer solchen Anstalt, mag hier die Leipziger Klassenlotterie dienen. Diese läßt 16000 Loose austheilen, wovon in jeder der vier ersten Ziehungen 800 und in der fünften als der letzten, 12800 Nummern gezogen werden. Die in den vier ersten Klassen herauskommenden Nummern sind Treffer, die mehr oder weniger gewinnen. In der fünften Klasse kommen nur 1234 mit Gewinn und Prämien, und die übrigen als Nieten heraus.

Der Preis eines Looses ist zu 1 Rtl. für die 1te Klasse festgesetzt

" " " " " " 2 " " " 2te " "
" " " " " " 3 " " " 3te " "
" " " " " " 4 " " " 4te " "
" " " " " " 4½ " " " 5te " "

zu 14½ " Rtl. für sämmtliche Klassen.

Rthlr.

hiernach ist die Einnahme für die 1te Klasse . . 16000
für die 15200 übrigen Loose zur 2ten Klasse zu 2 Rtl. 30400
" " 14400 " " " 3ten " " 3 " 43200
" " 13600 " " " 4ten " " 4 " 54400
" " 12800 " " " 5ten " " 4½ " 57600
die ganze Einnahme 201600

Dagegen werden in der 1ten Klasse 7610 Rtl. gewonnen

" " 2ten " " 11200 " "

" " 3ten " 16220 " "

" " 4ten " 21220 " "

" " 5ten " 145350 " "

die ganze Ausgabe 201600 Rthlr.

Wäre der Preis aber nach dem Ertrag des Gewinns in jeder Klasse regulirt worden, so würden die Loose der vier ersten Klassen wohlfeiler, dagegen das Loos in der fünften Klasse, und der Preis für die sämmtlichen Klassen höher gebracht worden seyn, wie die folgende Berechnung zeigt.

Setzt man nämlich, (den Rthlr. zu 24 Groschen den Ggr. zu 12 Pfennigen.)

	Rtl.							Rtl. Ggr. Pf.
I.	7610	für	16000	Loose,	so	kommt	1 Loos auf	11 . 4 $\frac{4}{19}$
II.	11200	"	15200	"	"	"	" "	17 . 8 $\frac{4}{19}$
III.	16220	"	14400	"	"	"	" "	1 . 3 . $\frac{4}{19}$
VI.	21220	"	13600	"	"	"	" "	1 . 13 . 5 $\frac{11}{19}$
V.	145350	"	12800	"	"	"	" "	11 . 8 . 6 $\frac{4}{19}$

und hiernach der Preis für alle Klassen 15 . 6 . 1 $\frac{11}{19}$

Nro 38. Die rechtmäßige Theilung vor der Beendigung des Spiels.

Zwei oder mehrere Spieler machen eine Bulle oder Spielkasse, die zum Gewinn ausgesetzt wird. Das Spiel wird vor der Beendigung aufgehoben, und die Bulle soll nach Verhältniß der bereits erlangten Vortheile eines jeden getheilt werden. Es kommt hierbei offenbar auf den Grad der Wahrscheinlichkeit an, den der Eine oder Andere zum Gewinn des Spiels für sich hat; denn hätte jeder Spieler bei der Unterbrechung die gleiche Wahrscheinlichkeit zum

Gewinn, so hätte jeder eben so viel Anspruch auf die Kasse als der andere, und diese würde rechtmäßig zur Hälfte getheilt werden. Wie dieser Grad der Wahrscheinlichkeit und die hiervon abhängende rechtmäßige Theilung in allen vorkommenden Fällen auseinander zu setzen ist, lehren die folgenden Beispiele.

Erstes Beispiel.

Gesetzt es wollte ein Spieler mit dem andern wetten, daß er mit einem Würfel, zweimal nach einander eine bestimmte Nummer werfen werde, z. B. Nummer 5, und er träfe sie zum erstenmal, welchen Anspruch hätte er hiernach auf die Bulle geltend zu machen, wenn sie überein kämen den zweiten Wurf nicht abzuwagen? Unstreitig $\frac{1}{6}$, denn nun ist es ebenso, als wenn er jetzt erst gewettet und 1 gegen 5 darauf gesetzt hätte, die bestimmte Nummer mit Einem Wurf zu werfen, indem er dann unter 6 möglichen Fällen nur Einen für sich und der andere dagegen 5 günstige Fälle für sich hätte; kämen sie nun überein die Wette wieder aufzuheben, so würde jeder seinen Einsatz zurücknehmen, der Erste also $\frac{1}{6}$ und der Andere $\frac{5}{6}$ der Bulle. Es ist also nur noch die Frage, wie viel das 6tel der Bulle dem Ersten trage, oder wie die Bulle, worauf er den Anspruch eines 6tel erworben hat, anfänglich zusammengesetzt wurde? und die Antwort wird durch die Wahrscheinlichkeit bestimmt, worauf er die Wette eingehen konnte; zweimal nach einander die bestimmte Nummer zu treffen?

Da es ganz gleichgültig ist, ob man zweimal nach einander den Würfel a fallen und die zum Vorschein kommenden Seiten gelten lasse, oder ob man die mit 2 Würfeln a und b erscheinende Seiten auf einmal dafür werfe, so kann man also nach der Combinationstafel in Nro 34.

auf die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ wetten, daß man zweimal nacheinander die bestimmte Nummer treffen werde. Setzte der Wettende also einen Gulden aus, so müßte der Gegner 35 Gulden dagegen setzen, die Bulle bestände in diesem Fall aus 36 Gulden, und hiervon machte der 6te Theil, 6 Gulden aus.

Zweites Beispiel.

Es legen 2 Spieler, zu gleichen Theilen, 40 Ducaten zusammen, die derjenige ziehen soll, welcher zuerst 3 Parthien Piquet von dem andern gewinnt. Nachdem der Eine 2 Parthien gewonnen hat und der Andere eine Parthie, werden sie genöthigt das Spiel aufzuheben, und es fragt sich, wie viel ein Jeder rechtmäßig von der Bulle der 40 Ducaten zu ziehen hat? Man würde sehr irren, wenn man sich, dem oberflächlichen Ansehen nach, hier verleiten ließe, dem Einen $\frac{2}{3}$ und dem Andern $\frac{1}{3}$ zuzusprechen; hiergegen könnte der Erstere mit Recht das folgende einwenden. Ich bin es zufrieden, könnte er sagen, noch eine Parthie Piquet zu machen, gewinne ich diese, so ist die ganze Bulle mein, verliere ich sie aber, so bleibt mir doch noch die halbe Bulle übrig, da wir dann erst gleich stünden; will der Gegner nun diese Gefahr nicht laufen, so kann er mir das Eigenthum auf die Hälfte der Bulle nicht absprechen, die mir schon zukommt. Nehme ich diese nun abschlägig, so sind wir ebenfalls wieder gleichgestellt, und es bleibt einem jeden noch die gleiche Wahrscheinlichkeit für die übrige Hälfte; da wir nicht fortspielen wollen, so nehme ich also noch einen halben Antheil von dieser Hälfte zu mir, folglich in allem $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, oder zusammen $\frac{3}{4}$ der ganzen Bulle, und demnach 30 Ducaten; die übrigen 10 Ducaten aber gehören meinem Gegner.

Nro. 39. Maß der Fruchtbarkeit und Sterblichkeit, Sterblichkeits-Ordnung und Sterblichkeits-Tafeln.

Zu den merkwürdigſten Anwendungen der Wahrſcheinlichkeitberechnung auf die Vorfälle und Angelegenheiten im geſellſchaftlichen Leben, gehören unſtreitig die Beſtimmungen der menſchlichen Lebensdauer.

Nach den Angaben der vorzüglichſten Beobachter wird im Durchſchnitt angenommen, daß von

40 Menſchen auf dem platten Lande,
32 " in kleinen Städten,
28 " in größeren Städten und Handelsplätzen.
24 " in den größten Städten,
35 " in ganzen Ländern überhaupt,

jährlich einer mit Tod abgeht; daß hingegen wieder einer geboren wird, von

30 Menſchen auf dem platten Lande,
24 " in kleinen Städten,
28 " in größeren,
31 " in den größten Städten,
29 " in ganzen Ländern.

Das hieraus erſichtliche Verhältniß der Geſtorbenen und Gebornen zu den Lebenden, wird das Maß der Sterblichkeit und Fruchtbarkeit genannt. So iſt zum Beiſpiel auf dem platten Lande das Maß der Sterblichkeit $= \frac{1}{40}$ der Fruchtbarkeit $= \frac{1}{30}$.

Die nach genaueren Vergleichungen, für die verſchiedenen Altersſtufen geordneten Verhältniſſe der Lebenden zu den Geſtorbenen bilden, die ſogenannte Sterblichkeitsordnung und die hierüber entſtandenen Sterblichkeitstafeln (Mortalitätstafeln) zeigen, wie viel Menſchen gleichen Al-

ters von einer bestimmten Anzahl jährlich abgehn oder am Ende des Jahres noch am Leben sind.

Aus diesen Verhältnissen läßt sich dann auch wieder zurück auf die Bevölkerung schließen. Hört man zum Beispiel in einem kleinen Landstädtchen, daß in dem verflossenen Jahre 120 Menschen gestorben und 155 Kinder zur Welt gekommen sind, so nimmt man entweder das Product

$120 \times 32 = 3840$ nach dem Maß der Sterblichkeit, oder

$155 \times 24 = 3720$ nach dem Maß der Fruchtbarkeit für die Bevölkerung an, oder um das Genauere zu haben, das arithmetische Mittel 3780, wo nicht die runde Zahl 3800 dafür. Nur durch einen seltenen Zufall würden diese Producte völlig mit einander übereinstimmen können, indem die Factoren dazu; aus den Durchschnittszahlen der während einer Reihe von Jahren beobachteten und immer um etwas verschiedenen Verhältnisse bestehen.

Die Verfertigung der Mortalitätstafeln aus den Sterbregistern würde keine Schwierigkeit haben, wenn das Alter der Abgeschiedenen immer richtig darin angegeben wäre, oder wenn man dasselbe aus den Geburtsregistern berichtigen könnte. Allein wer könnte sich der mühseligen Arbeit unterziehen, jeden Verstorbenen, von dem Eintritt ins Leben bis zum Abschied von demselben, durch alle Wechsel des Standes und Aufenthalts zu verfolgen, wenn dieses Unternehmen auch nicht durch die vielen gleichlautenden Namen, und die noch so häufig in diesen Registern herrschende Unordnung vereitelt würde? Man mußte daher der Wahrheit auf eine andere Art beizukommen suchen. Der Erste, welcher den Weg dazu bahnte, war der berühmte Halley in England. Im Jahr 1693 gab er eine aus den Breslauer Registern gezogene Mortalitätstafel heraus. Wegen des geringen Unterschieds zwischen der Anzahl der Ge-

borenen und Gestorbenen, und des hieraus ersichtlichen Zustandes der Beharrlichkeit der Breslauer Volksmenge, glaubte er hierbei schließen zu dürfen, daß jede Altersklasse an dem jährlichen Abgang derselben, ihren verhältnißmäßigen Antheil nehme. Nach dieser Voraussetzung zog er aus den Sterberegistern von 1687 — 1691 die Summe der Abgeschiedenen von jedem Alter besonders heraus; subtrahirte alsdann von der Hauptsumme aller Verstorbenen, die Summe der verstorbenen einjährigen Kinder, und betrachtete den Rest als die Anzahl der Uiberlebenden. Von diesem Rest subtrahirte er die Summe der im zweiten Jahre verstorbenen Kinder, und nahm den neuen Rest für die Anzahl derjenigen, die das zweite Jahr überlebten. Von dem letzten Rest subtrahirte er wieder die Summe der dreijährigen Todten, und so weiter. Um die Rechnung zu vereinfachen reduzirte er zuletzt alle Verhältnisse auf die Zahl 1000, die er für die Summe der verstorbenen einjährigen Kinder annahm. Dieses Verfahren ist so bequem, daß man häufige Anwendungen davon machen kann, und nimmt man Beobachtungen dazu, die an mehreren Orten und durch längere Zeiträume gemacht wurden, so werden die Abweichungen von der Wahrheit sich größtentheils gegen einander ausgleichen, und die mittleren Resultate derselben sehr nahe kommen. Daher machten auch mehrere neuere Rechner Gebrauch davon, und es wurden für die meisten Hauptstädte in Europa Tafeln hiernach entworfen.

Unter diesen Tafeln zeichnen sich einige durch eine auffallende Regelmäßigkeit der Verhältnisse aus. Es sind die Mortalitätstafeln der holländischen Rentirer von Kerseboom, und die Mortalitätstafeln, die Deparcieux über die Geistlichen des Benedictinerordens, über die Besitzer der Leibrenten, und die sogenannten Tontinisten in Frankreich aufgestellt hat.

Es war keine unüberwindliche Schwierigkeit, das Leben der einzelnen Mitglieder dieser Klasse zu verfolgen, die sich von andern, durch ihre regelmäßige Lebensweise und die besondere Sorgfalt auszeichnen, welche sie auf die Verlängerung ihrer Existenz verwenden.

Gewöhnlich nimmt man nur Leibrenten für starke und wohlgebildete Kinder, oder für Erwachsene, die sich einer dauerhaften Gesundheit erfreuen. Viele derselben bleiben im ehelosen Stande, die Ordensgeistlichen gehören ohnedieß dazu, und treten erst dann in den Orden, wenn sie die Gefahren des Kindesalters und der Jünglingsjahre bereits überstanden haben. Diese Tafeln können zwar nicht zum Maßstab der allgemeinen Sterblichkeit gebraucht werden, sie verdienen aber den Vorzug zur Berechnung des Preises, den man billigerweise für eine zu verleihende Leibrente fordern kann.

Nro. 40. Der Grad der Wahrscheinlichkeit, wonach man in jedem Alter auf eine bestimmte Lebensdauer rechnen kann.

Die leichteste unter den Aufgaben, welche die Lebensdauer des Menschen betreffen, ist die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit man nach einem bereits erlangten Alter, noch auf eine gewisse Anzahl Jahre rechnen könne, wenn man die passenden Mortalitätstafeln dazu benutzen kann.

Sucht man z. B. den Grad der Wahrscheinlichkeit den man im 40ten Jahre hat, noch 10 Jahre länger zu leben, so nimmt man die Anzahl der Personen aus der Tafel, welche das 40te Jahr erreichten, und die Anzahl derjenigen, welche bis zum 50ten Jahre leben; man dividirt die letztere durch die erstere und erhält mit dem Quotient den gesuchten Grad der Wahrscheinlichkeit. Nach den französi-

schen Mortalitätstafeln, die man in dem Pariser astronomischen Kalender (Annuaire du Bureau des Longitudes) jährlich findet, verhält sich

die Zahl der Lebenden von 50 Jahren, zu der von 40 Jahren, wie 297070 zu 369404

und der gesuchte Grad der Wahrscheinlichkeit wäre hiernach beiläufig $\frac{297}{369}$ oder $\frac{805}{1000}$

Nach den Mortalitätstafeln von Süßmilch, wäre der Grad dieser Wahrscheinlichkeit in Berlin $= \frac{224}{300}$ oder $\frac{747}{1000}$

und in Wien $= \frac{220}{298}$ oder $\frac{738}{1000}$

Nach den Tafeln der schweizer Landleute von Müret, wäre derselbe $= \frac{431}{506}$ oder $\frac{852}{1000}$, also am größten.

Nach den Tafeln hingegen die Price aus den Londner Sterberegistern gezogen hat $= \frac{224}{300}$ oder $\frac{696}{1000}$, folglich am kleinsten.

Nro. 41. Das wahrscheinliche Leben, oder die wahrscheinliche künftige Lebensdauer.

Unter dem wahrscheinlichen Leben, wird die Wahrscheinlichkeit verstanden, daß man nach einer gewissen Anzahl Jahre eben sowohl noch am Leben als nicht mehr am Leben seyn könne, so daß man also mit mehr Grund auf diese, als auf eine kleinere oder größere Anzahl künftiger Lebensjahre rechnen könne.

Findet man z. B. in den Mortalitätstafeln, daß von 510 Personen die 15 Jahre alt sind, nach 40 Jahren oder im 55ten Jahre, nur noch die Hälfte, nämlich 255 Per-

sonen übrig sind, so folgt daraus die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ für jede dieser Personen, daß sie noch 40 Jahre leben können, da sie sich nothwendigerweise alsdann unter der einen oder der andern Hälfte, unter der gleichgroßen Anzahl der Lebenden oder Abgeschiedenen befinden muß, und die Wahrscheinlichkeit, daß sie ein Jahr mehr oder weniger leben können, würde geringer als diese seyn.

Hiernach würde dann das ganze, wahrscheinliche Alter dieser Personen auf $40 + 15 = 55$ Jahre zu setzen seyn.

Untersucht man auf diese Art von der Geburt an, das wahrscheinliche Leben in großen Städten und auf dem Lande, so stellt sich ein außerordentliches Mißverhältniß zum Nachtheil des Lebens in den Städten heraus, das wohl hauptsächlich seinen Grund in der gehemmten Cirkulation der Luft, und der sich anhäufenden Unreinlichkeit haben mag. Die engen Straßen und das Elend, welches die ärmere Klasse in ungesunde Wohnungen zusammendrängt, müssen eine beständige Verderbniß der Luft zur Folge haben, ohne der ungesunden Nahrung der Aermeren, und der verderblichen Schwelgerei der Reicheren zu gedenken.

Nach den Pariser Mortalitätstafeln von Düpre de St. Maur, stirbt die Hälfte der in einem Jahre gebornen Kinder daselbst zwischen dem achten und neunten Jahr.

In London ist im dritten Jahr nur noch die Hälfte davon übrig, in Wien etwas vor dem zweiten und in Berlin etwas nach dem zweiten Jahre.

Dagegen findet man in ganz Frankreich zusammengenommen, daß die Hälfte der in einem Jahre Gebornen, nicht vor dem 20ten oder 21ten Jahre abgeht; in England begreift dieser Zeitraum 27 bis 28 Jahre, und in der Schweiz sogar 41 Jahre. In Montpelier, wo die Bevölkerung auf 32000 Menschen angeschlagen wird, nimmt

man nur 6 Jahre dafür an, obschon der Aufenthalt in dieser Stadt der Gesundheit sehr zuträglich seyn soll.

In dem männlichen Alter von 40 Jahren, hat man nach dieser Berechnung noch die wahrscheinliche Hoffnung auf 21 Jahre in Paris, auf 23 Jahre in Frankreich überhaupt, auf 18 Jahre in London, 19 in Wien und Berlin, und auf 25 in der Schweiz.

In den meisten Mortalitätstafeln wird die Lebensdauer nur bis auf 90 oder 95 Jahre geführt, und da in der That nur sehr wenig Menschen dieses Alter erreichen, geschweige dann noch übersteigen, so kann man die verhältnißmäßige Anzahl der Menschen dieses Alters, gegen die der Neugebornen eines Jahres, zum Maßstabe der höchsten Lebensdauer nehmen.

Dieses Verhältniß wird für Frankreich, durch den Bruch 38/10000 ausgedrückt, welcher also anzeigt, daß von 10000 Menschen nur 38 das 90te Lebensjahr erreichen. Für London ist dieser Bruch 2/1000, für Wien beinah derselbe, für Berlin 42/10000 und für die Schweiz 5/1000 = 1/200.

In den Tafeln von Kerseboom über die Sterblichkeit der holländischen Rentirer, und denjenigen die Deparcieux aus den Sterbregistern der Tontinen in Frankreich gezogen hat, wird das höchste Alter zu 100 Jahren angenommen. Nach den ersteren, erleben nur 10 von 1400 Menschen dieser Klasse das 90te Jahr. Nach den andern, erreichen dieses Alter nur 11 unter 1000 dreijährigen Kindern.

Die Wahrscheinlichkeit 80 Jahre lang zu leben, ist nach den Angaben von Price, 2/43 im Walliser Land, 2/45 im Brandeburgischen, 1/30 zu Breslau, 1/37 zu Berlin, 1/40 zu London, 1/41 zu Wien.

Gewöhnlich ſind die beiden Geſchlechter in den Mortalitätstafeln untereinander begriffen; doch iſt die Sterblichkeit bei beiden nicht gleich groß, ſondern geringer bei dem weiblichen Geſchlechte; auch trifft ſie überhaupt die verſchiedenen Stände und Profeſſionen nach verſchiedenen Verhältniſſen. Man hat daher jetzt auch angefangen, die Sterberegiſter auf einigen Plätzen hiernach zu ordnen, und es wäre zu wünſchen, daß dieſe Gewohnheit allerwärts eingeführt werden möchte, wodurch die Mortalitätstafeln noch genauer und brauchbarer für die beſonderen Fälle der Wahrſcheinlichkeitsberechnung werden könnten.

Nro. 42. Die mittlere Lebensdauer und Einrichtung der Mortalitätstafeln.

Die ſogenannte mittlere Lebensdauer ergiebt ſich für jedes Alter, aus der Durchſchnittszahl der ſämmtlichen Jahre, welche die Mitglieder derſelben Altersklaſſe noch mit einander nach der Wahrſcheinlichkeit zu durchleben haben. Geſetzt daß nach Verlauf von 44 Jahren noch 3348 von 10000 Neugebornen übrig ſeyen, die nun ſucceſſive ſo vom Schauplatz des Lebens abtreten, daß ſie nach dem Abgang des Letzten im 103ten Jahre, die Summe von 67445 Jahren, ſeit dem 45ten mit einander verlebt haben, ſo giebt der Quotient $\frac{67445}{3348}$ die beiläufige Durchſchnittszahl 20 für die mittlere Lebensdauer nach dem 44ten Jahre, oder bei dem Eintritt in das 45te Jahr.

Die mittlere Lebensdauer unterſcheidet ſich von der wahrſcheinlichen Lebensdauer darin, daß ſie die künftigen Lebensjahre angiebt, worauf jeder von derſelben Altersklaſſe mit derſelben Wahrſcheinlichkeit wie jeder andere rechnen kann, und daß die wahrſcheinliche Lebensdauer

Nro. 41, die Anzahl der Jahre begreift, die man nach der größten Wahrscheinlichkeit noch durchleben kann.

Nach dem ersten Jahre findet nur ein geringer Unterschied statt, zwischen den Graden der beiderlei Wahrscheinlichkeiten, wie aus der folgenden Tafel I. ersichtlich.

Diese, aus dem angeführten Werke als Muster einer Mortalitätstafel gezogen, enthält

in der 1ten Spalte, die fortlaufenden Jahre von 0 bis 103, als dem hierbei angenommenen höchsten Lebensziele,

in der 2ten Spalte, die Anzahl der Todten in jedem Jahre, in der 3ten Spalte die Anzahl der in jedem Jahre noch Lebenden.

Die Zahlen dieser Spalte entstehen aus der successiven Summation der Zahlen der 2ten Spalte von unten angefangen; nämlich aus der Summation der 2 untersten Zahlen, dann der 3 untersten Zahlen, und so weiter; denn da im letzten Jahre einer übrig ist, und im vorletzten oder 102ten Jahre einer stirbt, so müssen im Anfang desselben noch 2 Personen übrig gewesen seyn, die 102 Jahre alt waren. Da ferner ein Jahr zuvor auch nur einer gestorben ist, so müssen $2 + 1 = 3$ Personen im Alter von 101 Jahre übrig gewesen seyn. Eben so folgt, daß im 100ten Jahre, worin 3 Personen gestorben sind, noch $3 + 3 = 6$ Personen übrig gewesen seyn müssen. Geht man nun so fort, so kommt man auf die anfängliche Zahl von 10000 Neugebornen;

in der 4ten Spalte findet man die Summen der Jahre, welche die Mitglieder jeder Altersklasse zusammengenommen noch nach der Wahrscheinlichkeit zu durchleben haben.

Diese Spalte entsteht eben so aus der 3ten Spalte, wie die 3te aus der 2ten; denn von den beiden im Anfang des vorletzten Jahres noch übrigen Personen, hat jede noch 1 Jahr zu leben, dieß machen zusammen . . . . . 2 Jahre
und eine derselben hat noch mehr zu leben 1 Jahr

also haben sie in allem noch . . . . 3 Jahre zu leben.

Im 101ten Jahre sind 3 Personen übrig, wovon jede noch 1 Jahr zu leben hat, dieß macht zusammen . . . . . 3 Jahre
zwei dieser Personen haben außerdem zusammen noch . . . . . 3 Jahre zu

leben, also haben sie in allem noch Rechnung auf . . . . . 6 Jahre zu machen.

Im 100. Jahre sind noch 6 Personen übrig, jede derselben kann das nächste Jahr erleben, dieß macht zusammen . . . . . 6 Jahre
3 Personen darunter haben aber noch zusammen auf . . . . . 6 Jahre

zu rechnen, und so kommen in allem 12 Jahre heraus.

Die 5te Spalte zeigt das Verhältniß der Sterbenden zu den Lebenden jedes Alters an, oder von wie vielen desselben Alters jährlich einer stirbt, und ist das Ergebniß der Zahlendivision der 3ten Spalte, durch die nebenstehenden Zahlen der 2ten Spalte.

Die 6te Spalte zeigt die mittlere Lebensdauer an, die man jedem Individuum derselben Altersklasse, mit

Einbegriff der ſchon verlebten Jahre zuſchreiben kann, oder ſie zeigt das Alter an, wozu es jeder überhaupt bringen kann, je nachdem er ſchon ein gewiſſes Alter erreicht hat. — Man findet nämlich die künftige mittlere Lebensdauer, durch die Diviſion der Zahlen der 3ten Spalte in die nebenſtehenden Zahlen der 4ten Spalte, das iſt durch die Diviſion der in gleichem Alter lebenden Perſonen, in die Summe der Jahre, die ſie zuſammengenommen noch zu durchleben haben. Addirt man nun hierzu die bereits verlebten Jahre, ſo kommt die ganze mittlere Lebensdauer heraus, die man zur Unterſcheidung von der künftigen mittleren Lebensdauer, auch das mittlere Alter nennt. Bei dem Antritt des 20. Jahres iſt z. B. die Anzahl der Lebenden = 5124, und die Summe der für dieſe noch übrigen Lebensjahre = 175854. Der Quotient $\frac{175854}{5124}$ zeigt alſo die künftige mittlere Lebensdauer von 34 $\frac{1}{10}$ Jahren an. Addirt man hierzu 20 Jahre, ſo kommt das mittlere Alter von 54 $\frac{1}{10}$ Jahren heraus.

Die 7te Spalte zeigt endlich die nach Nro. 40 berechnete wahrſcheinliche künftige Lebensdauer mit Einbegriff der bereits verlebten Jahre, oder das wahrſcheinliche Alter an. Wenn z. B. das wahrſcheinliche Alter für diejenigen geſucht wird, die das 20te Jahr angetreten haben, ſo findet man, daß die Hälfte ihrer Anzahl in der Zeit verſchwindet, die zwiſchen das 54te und 55te Jahr, und am nächſten auf das 54$\frac{1}{10}$te Jahr fällt.

Anmerkung.

Zum Anfang der 6ten Spalte findet man die Zahl 29,5, welche wie $29\frac{5}{10}$ gelesen wird. Der Anfang der 7ten Spalte heißt $29\frac{}{10}$, die Ziffern zur Rechten des Komma sind nämlich Zehntel.

Für Leser welche mit den Decimalbrüchen noch nicht bekannt sind, ist zu bemerken, daß jeder Bruch dessen Nenner 10,100,1000 u. s. w. ist, ein Decimalbruch heißt und zur Abkürzung blos durch den Zähler angedeutet wird, wobei man sich den Nenner mit so viel Nullen nach 1 denkt, als der Zähler Ziffern hat. Um z. B. $8\frac{13}{100}$ zu schreiben, setzt man 8,13 und 0, 321 bedeutet Null Ganze und $\frac{321}{1000}$

15,021 ist so viel als $15\frac{21}{1000}$

0,0021 so viel als $\frac{21}{10000}$, und nach diesen Beispielen sind alle andern Decimalbrüche zu verstehen.

Tafel F.

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl derjenigen die mit Tod abgehen.	3. Anzahl der noch Lebenden.	4. Summe der künftigen Lebensjahre.	5. Die Anzahl wovon jährlich einer stirbt.	6. Mittleres Alter.	7. Wahrscheinliches Alter.
0	2610	10000	295022	4	29,5	22,6
1	610	7390	285022	12	40,2	40,5
2	340	6780	277632	20	42,1	44,4
3	233	6440	270852	27	45,-	46,7
4	169	6207	264412	37	46,7	48,3
5	140	6038	258205	43	47,7	49,5
6	116	5898	252167	51	48,5	50,2
7	96	5782	246269	60	49,6	51,0
8	80	5686	240487	71	50,3	51,0
9	68	5606	234801	82	50,9	52,6
10	58	5538	229195	95	51,4	52,4
11	50	5480	223657	110	51,8	52,8
12	45	5430	218177	121	52,2	53,1
13	42	5385	212747	128	52,5	53,3
14	39	5343	207362	137	52 8	53,6
15	37	5304	202019	143	53,1	53,8
16	35	5267	196715	151	53,3	54,0
17	33	5232	191448	159	53,6	54,2
18	36	5199	186216	144	53,8	54,4
19	30	5163	181017	132	54,1	54,6
20	43	5123	175854	119	54,3	54,8
21	48	5081	170730	106	54,6	55,1
22	54	5033	165649	93	54,5	55,3
23	58	4979	160616	86	55,2	55,6
24	62	4921	155637	79	55,6	56,9

Tafel I.

(Fortsetzung.)

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl derjenigen die mit Tod abgehen.	3. Anzahl der noch Lebenden.	4. Summe der künftigen Lebensjahre.	5. Die Anzahl wovon jährlich einer stirbt.	6. Mittleres Alter.	7. Wahrscheinliches Alter.
25	65	4859	150716	75	56,0	56,3
26	67	4794	145857	72	56,4	56,7
27	69	4727	141063	69	56,8	57,0
28	70	4658	136336	67	57,3	57,4
29	71	4588	131678	65	57,7	57,8
30	72	4517	127090	63	58,1	58,1
31	74	4445	122573	60	58 6	58,5
32	75	4371	118128	58	59,0	58,9
33	77	4296	113757	56	59,5	59,3
34	79	4219	109461	54	59,9	59,7
35	80	4140	105242	52	60,4	60,1
36	80	4060	101102	51	60,9	60,5
37	81	3980	97042	49	61,4	60,9
38	81	3899	93062	48	61,9	61,3
39	80	3818	89163	48	62,4	61,7
40	80	3738	85345	47	62,8	62,1
41	79	3658	81607	46	63,3	62,5
42	78	3579	77949	45	63,8	62,9
43	77	3501	74370	45	64,2	63,2
44	76	3424	70869	45	64,7	63,6
45	75	3348	67445	44	65,1	64,0
46	75	3273	64097	44	65,5	64,3
47	76	3198	60924	42	66,0	64,7
48	77	3122	57626	41	66,4	65,0
49	78	3045	54504	39	66,9	65,4

Tafel I.

(Fortsetzung.)

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl derjenigen die mit Tod abgehen.	3. Anzahl der noch Lebenden.	4. Summe der künftigen Lebensjahre.	5. Die Anzahl wovon jährlich einer stirbt.	6. Mittleres Alter.	7. Wahrscheinliches Alter.
50	80	2967	51459	37	67,3	65,8
51	82	2887	48492	35	67,8	66,2
52	84	2805	45665	33	68,2	66,6
53	86	2721	42800	32	68,7	67,0
54	88	2635	40079	30	69,2	67,5
55	90	2547	37444	28	69,7	67,9
56	92	2457	34897	27	70,2	68,4
57	94	2365	32440	25	70,7	68,9
58	96	2271	30075	24	71,2	69,4
59	98	2175	27804	22	71,8	70,0
60	100	2077	25629	21	72,3	70,6
61	101	1977	23552	20	72,9	71,2
62	103	1876	21575	18	73,5	71,9
63	105	1773	19699	17	74,1	72,4
64	104	1668	17926	16	74,7	73,1
65	102	1564	16258	15	75,4	73,7
66	99	1462	14694	15	76,0	74,4
67	95	1363	13232	14	76,7	75,7
68	92	1268	11869	14	77,4	75,7
69	88	1176	10601	13	78,0	76,3
70	85	1088	9425	13	78,7	76,9
71	82	1003	8337	12	79,4	77,5
72	80	921	7334	12	80,0	78,1
73	79	841	6413	11	80,6	78,7
74	77	762	5572	10	81,3	79,3

Tafel I.

(Fortsetzung.)

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl derjenigen die mit Tod abgehen.	3. Anzahl der noch Lebenden.	4. Summe der künftigen Lebensjahre.	5. Die Anzahl wovon jährlich einer stirbt.	6. Mittleres Alter.	7. Wahrscheinliches Alter.
75	75	685	4810	9	82,0	79,9
76	73	610	4125	8	82,7	80,6
77	70	537	3515	8	83,5	81,3
78	66	467	2978	7	84,3	82,0
79	62	401	2511	6	85,2	82,8
80	56	339	2110	6	86,2	83,6
81	50	283	1771	6	87,2	84,5
82	43	233	1488	5	88,4	85,7
83	35	190	1255	5	89,6	87,4
84	25	155	1065	6	90,8	89,3
85	18	130	910	7	92,0	90,9
86	13	112	780	9	92,9	92,0
87	10	99	668	10	93,7	92,8
88	9	89	569	10	94,4	93,6
89	9	80	480	9	95,0	94,1
90	8	72	400	9	95,5	94,7
91	8	64	328	8	96,1	95,3
92	8	56	264	7	96,7	95,9
93	7	48	208	7	97,3	96,5
94	7	41	160	6	97,9	97,1
95	7	34	119	5	98,5	97,7
96	6	27	85	4	99,2	98,3
97	6	21	58	3	99,8	98,9
98	5	15	37	3	100,5	99,5
99	4	10	22	2	101,2	100,3
100	3	6	12	2	102,0	101,0
101	1	3	6	2	103,0	102,5
102	1	2	3	2	103,5	103,0
103		1	1		104,0	

Nro. 43. Verschiedene Anwendungen der Mortalitäts-Tafel I. und Bemerkungen darüber.

1) Die Ergebnisse der 6ten und 7ten Spalte sind es, wovon man hauptsächlich bei den Rechnungen und Instituten Gebrauch macht, die auf die Sterblichkeit des Menschen begründet werden.

Gesetzt, daß eine Gesellschaft von 3198 Personen sich zu irgend einem Zweck vereinige, und so lang bestehen solle, bis die Hälfte derselben mit Tod abgegangen ist, und daß nur solche Personen dazu aufgenommen werden, die ihr 47tes Lebensjahr angetreten haben, wie wird man die wahrscheinliche Dauer dieser Gesellschaft bestimmen können?

Zur Beantwortung dieser Frage findet man in der 7ten Spalte, in der Zeile des 47ten Jahres, das wahrscheinliche Alter von 64,7 Jahre, denn es zeigt sich, daß die Anzahl der Lebenden, zwischen dem 64ten und 65ten Jahre nur noch die Hälfte von 3198 ausmacht. Subtrahirt man nun das Alter 47 von dem wahrscheinlichen Alter 64,7; so zeigt der Rest 17,7 die gesuchte Dauer der Gesellschaft an. Es wäre zwar möglich, daß ihr Ende etwas früher oder später, durch besondere Umstände herbeigeführt würde, aber im Allgemeinen nicht wahrscheinlich.

Ein Mensch, der seine Heimath im 47ten Lebensjahre verlassen, und seit beinahe 18 Jahren keine Nachricht von sich gegeben hat, giebt die Veranlassung zu der Frage, ob er sich noch unter der Zahl der Lebenden befinde oder nicht? —

In der Mortalitäts-Tafel sieht man, daß im Jahre 47 noch 3189 Lebende vorhanden sind, und 18 Jahre später, nämlich im Jahr 65 ist etwas weniger als die Hälfte davon noch übrig; den eigentlichen Zeitpunct, worin die

Hälfte dieſer Altersklaſſe abgegangen iſt, zeigt das wahrſcheinliche Alter 64,7 an, da nun auch nicht völlig 18 Jahre ſeit der Abweſenheit des Befragten verfloſſen ſind, ſo kann man ihm das wahrſcheinliche Alter von 64,7 Jahre beilegen, und da er ſich eben ſowohl unter der einen als der andern Hälfte befinden kann, nämlich unter den noch Lebenden oder unter den Todten, ſo bleibt die Frage unentſchieden. Ein Jahr vorher würde es wahrſcheinlicher ſeyn, daß er noch lebe, und ein Jahr ſpäter, daß er aufgehört habe zu leben. Demnach werden auch die Aufgaben dieſer Art durch die Reſultate der 7ten Spalte aufgelöſt.

2) Dagegen dient die 6te Spalte vorzüglich in Unterſuchungen der folgenden Art. Es ſoll zum Beiſpiel einer beträchtlichen Anzahl von Rentirern einer Altersklaſſe, eine lebenslange Rente gezahlt werden, und man ſucht die wahrſcheinliche Summe der jährlichen Zahlungen, bis zum Lebens-Ende aller Intereſſenten im Durchſchnitt genommen, ſo hat man es offenbar mit der mittlern Lebensdauer derſelben, folglich mit den Reſultaten der 6ten Spalte der Tafel zu thun.

Für die 10000 Neugeborne findet man in der 4ten Spalte der Tafel die Zahl 295022 nicht nur als die Summe der ihnen noch bevorſtehenden Lebensjahre, ſondern auch als die Summe der ihnen beſtimmten Leibrenten, wenn ſie der Annahme gemäß ſämmtlich zum Genuß einer Leibrente von 1 Rthlr. berechtigt ſind, denn da jeder das mittlere Alter von 29,5022 oder kurz von 29½ Jahre im Durchſchnitt genommen erreicht, ſo hat die Leibrenten-Caſſe alſo 29½ mal 10000 Rthlr. zu zahlen. Hiernach wird ſolche folglich den Preis für die Leibrente reguliren. Nur darf man den Schluß hieraus nicht ziehen, daß jedes Kind wirklich auch den Genuß der Leibrente ſo viel-

mal zu hoffen habe; weil das wahrſcheinliche Alter, gemäß der Angabe der 7ten Spalte, nur 22 6/10 Jahre begreift. Es iſt demnach kein Vortheil dabei, das Kind bei ſeiner Geburt ſogleich mit einer Leibrente auszuſtatten, indem man dasjenige was ihm die Wahrſcheinlichkeit nur 22 mal verſpricht, für 29 mal bezahlen muß.

3) Die Vergleichung der 6ten mit der 7ten Spalte, zeigt übrigens, daß der Unterſchied zwiſchen dem mittleren und wahrſcheinlichen Alter, der für die Neugebornen ſtatt findet, ſich für die folgenden Alterklaſſen plötzlich vermindert. Beide könnten nur dann einander gleich ſeyn, wenn die Anzahl der Lebenden gleichförmig mit Tod abging, und dieſes findet beinahe in dem Alter vom 35ten bis 60ten Jahre ſtatt, daher der geringe Unterſchied der hierbei erſichtlich iſt. Die Leibrenten-Caſſe wird, um vorſichtig zu Werk zu gehen, ſich an den Reſultaten der 6ten Spalte, oder des mittlern Alters halten, der Rentirer aber muß ſich nach dem wahrſcheinlichen Alter oder den Ergebniſſen der 7ten Spalte berathen.

Nach der Vorausſetzung bei der gegenwärtigen Mortalitäts-Tafel gehen die Sterbenden erſt am Ende des Jahres ab.

Wahrſcheinlicherweiſe werden aber ungefähr eben ſo viele vor als nach der Mitte des Jahres mit Tod abgehen, und folglich alle im Durchſchnitt genommen ein halbes Jahr weniger leben. Aus dieſem Grund wird die mittlere Lebensdauer zur Berichtigung auch um ein halbes Jahr kürzer genommen. Wird hingegen angenommen, daß die Todten im Anfang des Jahrs von den Lebenden getrennt werden, ſo wird das mittlere Alter um ½ Jahr verkürzt und dieſes zur Verbeſſerung neu dazu geſetzt. Im Grunde kommt es aber hier auf ½ Jahr mehr oder weniger nicht an, da doch die Genauigkeit der Sterberegiſter

und Beobachtungen, worauf die Mortalitätstafeln begründet werden, noch vieles zu wünschen übrig läßt.

4) Sowohl auf dem Lande, wenn es einen gewissen Grad der Kultur erlangt hat, als in den großen Städten scheint ein solcher Beharrungszustand der Bevölkerung einzutreten, daß jährlich fast eben so viel Menschen sterben als geboren werden. Nach dieser Voraussetzung enthält die 3te Spalte der vorliegenden Mortalitätstafel bei jeder Altersklasse die ganze Anzahl der darin lebenden Individuen, und in der 4ten Spalte findet man demnach die ganze Anzahl aller Individuen dieser und aller höheren Altersklassen die zugleich mit einander im Leben sind, denn wenn beständig wieder eben so viele Menschen geboren als durch den Tod weggerafft werden, so existiren auch alle Altersklassen in jedem Jahre zugleich, und die Gesammtsumme der 3ten Spalte ist die Summe der Lebenden aller Altersklassen, oder der ganzen Bevölkerung. In der 4ten Spalte findet man demnach von unten anfangend, die Summe der Lebenden von der letzten Altersklasse, von den zwei letzten Altersklassen, von den drei letzten, und so weiter. So enthält zum Beispiel die Zahl 175854 bei dem 20ten Jahre, die Summe der 20jährigen Menschen, nebst den Summen der 21jährigen, der 22jährigen, u. s. w.

Indem die Mortalitätstafeln aber auf diese Art den eigentlichen Bestand der Bevölkerung vor Augen legen, geben sie zugleich den richtigsten Maßstab zur Beurtheilung des Wohlstandes ab, worin der Staat sich befindet. Die Stärke des Staats hängt nicht sowohl von der Größe seiner Bevölkerung ab, als von der Menge der Bürger, die mit der vollen Ausübung ihrer Kräfte zur Beförderung des allgemeinen Wohlstandes thätig sind. Eine unverhältnißmäßige Anzahl von Kindern und Greisen, kann

dem Staat nur zur Laſt gereichen. Man hat die auffallende Bemerkung gemacht, daß die Bevölkerung in den ſtürmiſchen Zeiten, worin man es am wenigſten vermuthen ſollte, und worin die größten Lücken unter der Klaſſe der kräftigſten Bewohner entſtehen, gerade am ſtärkſten vermehrt wird. Durch verheerende Seuchen und Krieg werden viele Ehen zerriſſen; es werden mehrere überſetzte Gewerbe, und mehrere Grundſtücke wieder ergiebig und frei, und bei der Gelegenheit, die ſich Mehreren zur Nahrung wieder darbietet, werden neue Ehen in größerer Anzahl geſchloſſen, und folglich mehr Kinder erzeugt, wodurch denn ein größeres Vermehrungs-Verhältniß in der Bevölkerung auf ſo lang entſteht, bis das Land wieder hinlänglich bevölkert ſeyn wird.

5) Es iſt eine bekannte Thatſache, daß in den größten Städten jährlich mehr Menſchen begraben als erzeugt werden, und dieß iſt eine offenbare Folge des beſtändigen Zuflußes von Menſchen aus kleineren Städten und Dörfern, die ſich nur dann dahin begeben, wenn ſie erwachſen ſind und bereits ein gewiſſes Alter erlangt haben. Diejenigen darunter, die im höheren Alter nicht wieder in ihre Heimath zurückkehren, vermehren alſo die Anzahl der Todten in den Städten, und gehen hingegen von der Anzahl der Sterbenden auf dem Lande ab.

6) Von 1000 Menſchen die auf dem Lande zugleich zur Welt kommen, ſtirbt ungefähr die Hälfte vor dem 2ten Jahre ab, ſetzt man nun den Fall, daß die übrigen 500 auswandern, und in den Städten ſterben, ſo werden die Sterberegiſter auf dem Lande um 500 Todte vermindert, und gerade hierdurch wird die Sterblichkeit der Kinder dort in den erſten Jahren größer zu ſeyn ſcheinen als ſie wirklich iſt; denn da die Zahlen der in jedem Jahre noch Lebenden der 3ten Spalte ſich aus jenen

der Sterbenden, in der 2ten Spalte der Mortalitätstafeln, durch die successive Summation der letzten bis zu dem ersten Jahre bilden, so wird die anfängliche Zahl der Lebenden um 500 kleiner und folglich die Zahl der Todten in den ersten Jahren verhältnißmäßig größer erscheinen.

Da es nun, wie Lambert bemerkt, zu schwierig ist, über die aus solchen Umständen herrührenden Unrichtigkeiten der Mortalitätstafeln Rechnung zu tragen, so bleibt kein anderes Mittel zur richtigen Beurtheilung der Sterblichkeit im Allgemeinen übrig, als die in den Städten und auf dem Lande Sterbende in gehörigem Verhältnisse zusammen zu nehmen, und nach diesem ist die gegenwärtige Tafel aufgestellt worden. Die Rücksicht auf die Geburtsstädte sowohl als auf den Ort des Abscheidens fällt dadurch weg, und die Rechnung wird der Wahrheit näher gebracht. Es leben überhaupt ungefähr doppelt so viel Menschen auf dem Lande als in den Städten.

7) Nach dieser allgemeinen Tafel wird das mittlere Alter von der Geburt an genommen, durch die Zahl von 29½ Jahren ausgedrückt. Zieht man dasselbe aber aus den besondern Mortalitätstafeln verschiedener Orte, so erhält man auch sehr verschiedene Resultate dafür. In Frankreich z. B. wird das mittlere Alter, von der Geburt an, auf 28¼ Jahre gesetzt. In London auf 17$\frac{1}{12}$, in Wien auf 15¼, Berlin 17$\frac{1}{12}$ und in der Schweiz auf 37$\frac{1}{12}$.

Die Verschiedenheit des Geschlechts zieht ebenfalls einen merklichen Unterschied hierin nach sich. In Montpellier, zum Beispiel, fand man das mittlere Alter des männlichen Geschlechts insbesondere = 24 Jahre, 3 Monat und 15 Tage, des weiblichen 28 Jahre, 3 Monat und 28 Tage; die Durchschnittszahl für das mittlere Alter der beiden Geschlechter zusammen genommen, ist 26 Jahre, 3 Monat 20 Tage.

8) Das Alter worin man auf die noch bevorstehende längste mittlere Lebensdauer rechnen kann, tritt mit dem 4ten und 5ten Lebensjahre nach der gegenwärtigen Tafel ein, denn bei dem 4ten Jahre findet man das mittlere Alter von 46,7 Jahren, und bei dem 5ten Jahre das mittlere Alter von 47,7, subtrahirt man nun 4 von 46,7 so bleibt die künftige mittlere Lebensdauer 42,7, eben so wie bei der Subtraction des 5ten Jahres von 47,7 übrig. Vor und nach dem 4ten und 5ten Jahre ist der Rest der Subtraction aber kleiner. Nach den Mortalitätstafeln für Frankreich, tritt diese Periode im 5ten Jahre der Kindheit ein, wonach das mittlere Alter 48$\frac{1}{12}$ Jahre, und folglich die noch bevorstehende mittlere Lebensdauer 43$\frac{1}{12}$ Jahre ist.

9) Die Beobachtungen über die Sterblichkeit sind überhaupt noch zu neu, als daß man daraus etwas Bestimmtes über diejenige in viel älteren Zeiten schließen könnte. Es scheint jedoch, daß die Fortschritte der Künste und Wissenschaften so viel zur Vermehrung der Bequemlichkeiten des Lebens beigetragen haben, daß die mittlere Lebensdauer sich, seitdem man angefangen Beobachtungen darüber anzustellen, merklich vergrößert hat. Aus den Sterberegistern der Stadt Genf in der Schweiz, ergiebt sich, daß das mittlere Lebensalter daselbst im 16ten Jahrhundert nur 13$\frac{1}{2}$ Jahre ausmachte, daß es im 17ten Jahrhunderte 23$\frac{1}{2}$ Jahre begriffen und im 18ten Jahrhundert auf 32$\frac{1}{2}$ stieg, von der Geburt an gerechnet. Eben so zeigt sich das wahrscheinliche Alter in einer steigenden Progression, nur 4$\frac{1}{2}$ Jahre groß im 16ten Jahrhundert, schon auf 11$\frac{1}{2}$ Jahre im 17ten Jahrhundert, und auf 27 im 18ten Jahrhundert.

In dem jetzt erschienenen Werk des Grafen Chabrol: Statistische Untersuchungen über die Stadt Paris

und das Seine-Departement, findet man die folgenden merkwürdigen Angaben und Vergleichungen über den Zustand der dortigen Bevölkerung.

Unter Ludwig XIV. zählte man in Paris nicht mehr als 530000 Einwohner, und im Jahre 1817, zufolge einer amtlichen Aufnahme 713000. Die Gesammtzahl der während dem Zeitraum eines Jahrhunderts, von dem Anfang des Jahres 1710, bis zum Anfang des Jahres 1810 zu Paris einregistrirten Geburten, beträgt 1,931897, und die Gesammtzahl der Sterbefälle 1,935579. Die letzte im Jahr 1818 vorgenommene Aufnahme der Bevölkerung von Paris, giebt die Zahl seiner Einwohner zu 713955 an. In den ersten zwanzig Jahren des letzten Jahrhunderts, vom Jahr 1710 an gerechnet, betrug die Mittelzahl der jährlichen Geburten ungefähr 18000, in den folgenden 20 Jahren 18500. Von 1750 bis 1770 betrug sie 19000, von 1770 bis 1790 war sie 20000, und von 1790 bis 1810 begriff sie 21000.

Die Tabellen von 1745 ausgehend, zeigen in Betreff des Unterschiedes der Geschlechter, daß alljährlich mehr Knaben als Mädchen geboren worden sind. Die von 1745 bis 1821 einregistrirte Gesammtzahl, ohne die für das Findelhaus ausgesetzten Kinder, beträgt 1,121462 worunter 573700 Knaben und 547760 Mädchen, wonach die Zahl der männlichen Geburten sich zu der Zahl der weiblichen Geburten wie 22 zu 21 verhält.

Die Mittelzahl der jährlichen Ehen betrug

4246 von 1710 bis 1729,
4167 " 1730 " 1749,
4436 " 1750 " 1769.
5291 " 1790 " 1810.

In den letzten dreißig Jahren des 17ten Jahrhunderts war das Verhältniß der Geburten zu der Zahl der Ehen ungefähr 1 zu $4\frac{1}{4}$, demnach kamen auf 5 Ehen, 21 Geburten. Die Fruchtbarkeit der Ehen, und damit auch dieses Verhältniß, hat aber fortwährend abgenommen; es betrug

$4\frac{3}{4}$ von 1710 bis 1750
$4\frac{1}{10}$ von 1750 bis 1790

und von dieser Zeit an nur $3\frac{7}{10}$.

Die Anzahl der Findelkinder in den letzten Jahren Ludwigs XV. nahm auf eine sehr auffallende Weise zu, verminderte sich, was sehr merkwürdig ist, wieder um $\frac{1}{4}$ unter dem National-Convent und vermehrte sich hingegen wieder unter der kaiserlichen Regierung. Seit der Restauration ist sie gleich geblieben.

Uiber das Gesetz der Sterblichkeit in Paris so weit es sich aus den Beobachtungen folgern ließ, welche den Zeitraum von 1760 bis 1788 umfassen, stellt der Verfasser die folgenden Beobachtungen auf. Die Größe der Sterblichkeit steht mit dem Einfluß der Jahreszeiten auf die Gesundheit des Menschen im Verhältniß. Der Frühling, der Alles aufs Neue belebt, ist es gerade, der ihr am gefährlichsten ist, und die meisten Menschen dem Leben entreißt. Dieselbe Gährung, welche in jungen und kraftvollen Wesen die Lebensthätigkeit vermehrt, beschleunigt ebenfalls in schwachen und kranken Körpern die Wirkung der Urstoffe der Zerstörung. Der Monat, worin die Meisten sterben ist der April, und der welcher die wenigsten Opfer fordert ist der Juli. Reiht man die Monate nach den Graden ihres Einflußes auf die Sterblichkeit der Menschen an einander, so erhält man den folgenden Gesundheits-Kalender, der mit dem gefährlichsten anfängt und mit den zuträglichsten Monat auf-

hört. Nämlich: April, März, Februar, Mai, Januar, December, Juni, October, November, August und Juli.

Nach der Tabelle über die Sterbefälle während der Jahre 1819 und 21, wo der Alters- und Geschlechts-Unterschied angegeben ist, bemerkt man, daß die Sterblichkeit bei den Männern bis zum 25ten Jahre größer als bei den Frauen ist, und daß von diesem Alter an bis zum 50 Jahre viel mehr Frauen als Männer sterben. Man zählt indessen mehr Frauen als Männer, die zu einem hohen Alter gelangen.

Im Jahr 1821 fanden 348 vollzogene oder versuchte Selbstmorde statt; 244 hatten den Tod zur Folge. Unter dieser Zahl befinden sich 236 Männer. Die muthmaßliche Beweggründe der Selbstmorde waren: 35 aus Liebe; 126 aus Geistesschwäche, häuslichen Kummer und Krankheiten; 43 wegen Ausschweifungen, Spiel, Lotterie; 46 wegen Dürftigkeit, Dienstverlust, zerrütteten Umständen; 10 aus Furcht vor Vorwürfen und Strafen; 88 aus unbekannten Beweggründen; 33 wurden durch schweren, unwillkührlichen Sturz bewirkt; 38 durch Erdrosselung; 25 durch schneidende Werkzeuge; 60 vermittelst Schießgewehren; 23 durch Vergiftung; 42 durch Ersticken im Kohlendampf; 127 durch Ersäufung.

10) Bei der Konstruction der Mortalitätstafeln legt man in der That die Voraussetzung zum Grund, daß die Bevölkerung in den Zustand der Beharrlichkeit getreten sey, wobei die Geburts- und Sterbefälle sich gegen einander aufheben, und den die Beobachtungen auch wirklich ohne große Abweichungen in den bedeutendsten Städten und solchen Ländern, die bereits auf eine hohe Stufe der Kultur gebracht worden sind, zu erkennen geben. So wurde z. B. im Vorgehenden angeführt, daß von 1710 bis 1810 in Paris 1,931897 Geburten, 1,935579 Sterbe-

fälle einregistrirt worden sind: die Abweichung ist verhältnißmäßig nicht bedeutend und bestätigt dabei die Bemerkung 6), daß jährlich mehr Menschen in den großen Städten sterben als geboren werden. Noch geringer ist die Abweichung von diesem Beharrungszustande der Bevölkerung in London, nach den Sterberegistern die Lambert zu seinen Betrachtungen darüber benutzt hat.—Im Allgemeinen aber zeigt sich der Fortgang der Bevölkerung in einer beständigen Ebbe und Fluth, indem er in mehreren Ländern schon im Abnehmen ist, indessen sich in andern, wie zum Beispiel in den vereinigten Staaten Africa's, wo ein noch unbeschränkter und fruchtbarer Boden die erforderlichen Nahrungsmittel dazu darbietet, die Volksmenge in 25 Jahren verdoppeln soll. Man nimmt an, daß dieses unter den günstigsten Umständen auf der Erde schon in 15 Jahren möglich sey.

11) Die Oberfläche der Erde enthält sehr nahe 9 Millionen und 288000 Quadratmeilen; rechnet man hiervon $\frac{2}{3}$ ab, die mit Wasser bedeckt sind, so bleiben 3 Millionen Land übrig, und zieht man hiervon wieder $\frac{2}{3}$ ab für Felsen, Sandwüsten, Moräste, Eisfelder und andere Strecken die keiner Kultur empfänglich sind, so bleibt noch 1 Million Quadratmeilen übrig, worauf sich wenigstens 3000 Millionen Menschen ernähren könnten, da wie man annehmen kann 1 Quadratmeile Landes im Durchschnitt genommen, zur Ernährung von 3000 Menschen hinreichend ist. Nun rechnet man ungefähr

650 Mill. Menschen in Asien,
150 " " in Africa,
150 " " in America,
160 " " in Europa,
90 " auf zerstreutem Inselande folglich in allem

Ca1200 Millionen Menschen, so daß die Erde also bei-

nah 3 mal so viel Bewohner ernähren könnte, als man gegenwärtig darauf findet. —

12) Nachdem man mit den Wahrscheinlichkeitsberechnungen der menschlichen Lebensdauer bekannt geworden war, und den Werth des Geldes, welches auf Zinsen angelegt wird, zu berechnen gelernt hatte, so entstanden bald die Leibrentenkassen, die Tontinen, die Assecuranzanstalten des Lebens, und die Sparkassen. Die Unternehmer dieser Anstalten nahmen nicht nur, um sicher zu gehen, das mittlere Alter zur Richtschnur ihres Kalkuls, sondern auch die Mortalitätstafeln über die besondere Klasse der Lebenden, die sich hauptsächlich zu dem Ankauf von Leibrenten einfanden, sobald sie durch die Erfahrung über die längere Lebensdauer derselben belehrt worden waren, und deren im Vorgehenden gedacht worden ist.

Nro. 44. Die Leibrenten.

1) Mit dem Verkauf einer einfachen Leibrente verpflichtet sich die Leibrentenkasse gegen die Käufer derselben, zur jährlichen Auszahlung einer bestimmten Summe Geldes während seiner Lebzeit. Der Werth der Leibrente ist also nicht nur von dem gegenwärtigen Werth des Geldes nach angenommenen Zinsfuß mit den Zinsen-Zinsen abhängig, sondern auch von dem gegenwärtigen Alter des Käufers, oder von der wahrscheinlichen Anzahl der Jahre, worin ihm die Leibrente gezahl werden dürfte, und hierüber dient das mittlere Alter für jede gegenwärtige Altersklasse, der Leibrentenkasse, wie schon im Vorgehenden bemerkt, zur Richtschnur. Setzt man die künftige mittlere Lebensdauer des Käufers auf 21 Jahre, so wird er die Leibrente nach der Wahrscheinlichkeit 20 mal beziehen. Es ist zwar möglich, daß er früher oder später

vom Schauplatz des Lebens abtreten, allein im Ganzen genommen werden alle seine gegenwärtige Altersgenossen doch so nach einander, vor und nach dem ihnen zugehörigen mittleren Alter wegsterben, daß man sich nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit an dieser Durchschnittszahl halten muß; die Leibrentenkasse ist nicht für einen Einzigen, sondern für so viele als sich dazu einfinden mögen gestiftet, und was sie an dem längeren Leben des einen zu kurz kommt, das bringt die kürzere Lebensdauer des andern wieder ein.

2) Nimmt man nun der bequemen Rechnung wegen, die jährliche Rente zu 1 Rthlr an, und den Zinsfuß zu 4 pCt., so entsteht die Frage, welchen Werth die Leibrentenkasse auf die Leibrente setzen werde, die sie nach den Gründen der Wahrscheinlichkeit 20 Jahre lang nach einander zu entrichten hätte? und zur Beantwortung dieser Frage wird es nöthig die baaren Werthe für die Leibrente nach dem Verlauf des ersten, des zweiten und jeden folgenden Jahres nach der Discontorechnung, mit Berücksichtigung der Zinsen-Zinsen zu 4 pCt. zu bestimmen und in Eine Summe zu ziehen.

Ein Kapital von 100 Rthlr. zu 4 pCt. auf Zinsen gelegt, ist am Ende des ersten Jahres zu 104 Rthlr. angewachsen.

Der baare Werth von 104 Rthlr. die nach einem Jahre erst fällig sind, ist also 100 Rthlr, denn legt man diese zu 4 pCt. auf Zinsen an, so machen sie damit am Ende des Jahres wieder 104 Rthlr.

Wird das nach dem ersten Jahre auf 104 Rthlr. angewachsene Kapital, wieder auf ein Jahr weiter verzinset, so wächst es zu $\frac{104}{100} \times 104$ Rthlr. an, oder zu

$\frac{104 \times 104}{100 \times 100} \times 100$ Rthlr. $= \left(\frac{104}{100}\right)^2 100$ Rthlr. der baare Werth eines Kapitals von $\left(\frac{104}{100}\right)^2 100$ Rthlr., welches erst in zwei Jahren fällig ist, macht also 100 Rthlr. aus.

Eben so zeigt sich weiter der baare Werth von 100 Rthlr. für ein Kapital von $\left(\frac{104}{100}\right)^3 100$ Rthlr., welches erst nach drei Jahren fällig ist.

Hiernach findet man also den baaren Werth für 1 Rthlr. der nach einem Jahre fällig ist $= \frac{96154}{100000} = 0{,}96154$ durch die Regel Detri

104 : 100 = 1 Rthlr?

welche die Antwort $\frac{100 \times 1}{104} = \frac{100}{104} = 0{,}96154$ giebt. Ferner den baaren Werth 0,92456 für 1 Rthlr. der in 2 Jahren fällig ist, durch die Regel Detri

$104^2 : 100^2 = 1$ Rthlr? worauf die Antwort $\left(\frac{100}{104}\right)^2$

$= \frac{100}{104} \times \frac{100}{104} = 0{,}96154 \times 0{,}96154 = 0{,}92456$ erfolgt und es geht nach diesem Fortgang nun deutlich hervor, daß man die folgenden Werthe der Ordnung nach durch die Brüche $\left(\frac{100}{104}\right)^3$, $\left(\frac{100}{104}\right)^4$, $\left(\frac{100}{104}\right)^5$ u. s. w. finden werde, wie im Folgenden.

	Rthlr.
Für das 1te Jahr	0, 96154
" " 2te "	0, 92456
" " 3te "	0, 88900
" " 4te "	0, 85481
" " 5te "	0, 82193
" " 6te "	0, 79032
" " 7te "	0, 75992
" " 8te "	0, 73069
" " 9te "	0, 70259
" " 10te "	0, 67557
" " 11te "	0, 64958
" " 12te "	0, 62460
" " 13te "	0, 60058
" " 14te "	0, 57881
" " 15te "	0, 55526
" " 16te "	0, 53391
" " 17te "	0, 51338
" " 18te "	0, 49363
" " 19te "	0, 47464
" " 20te	0, 45639
die Summe	13, 59171

macht also den baaren Werth einer Leibrente aus, die nach der Voraussetzung zwanzig Jahre lang mit 1 Rthlr. bezahlt wird. Um hiernach den Werth einer Leibrente von 100 Rthr. für 20 Jahre zu finden, darf man die gefundene Summe nur mit 100 multipliciren, welches $1359\frac{171}{1000}$ giebt; und überhaupt muß man die Summe so viel mal nehmen, als so viel mal die Leibrente größer, als 1 Rthlr. gesetzt wird.

Anmerkung.

1. Bei dem im Handel üblichen Sconto, wird gewöhnlich das bedungene pCt. irrigerweise von dem zu discontirenden Betrag abgezogen. Um z. B. 3000 Rthlr. zu 1 pCt. zu discontiren, zieht man 30 Rthlr. ab, und giebt 2970 Rthlr. dafür. Hierdurch wird der Empfänger offenbar benachtheiligt; denn wollte er das Empfangene sogleich wieder zu 1 pCt. auf Zinsen legen, so würden ihm nur $29\frac{7}{10}$ für die Zinsen, und $2999\frac{7}{10}$ Rthr. für das Kapital mit den Zinsen anstatt der 3000 Rthlr. wieder eingehen. — Nur dann würde dieser Abzug rechtmäßig seyn, wenn er als Rabatt auch so bedungen wäre.

Um den baaren Werth von 3000 Rthlr. zu bestimmen die nach 3 Monat zahlbar sind, wenn der Zinsfuß 4 pCt. jährlich oder 1 pCt. vierteljährig angenommen wird, muß man nach den vorgehenden Gründen, das Verhältniß 101 : 100 oder die Regel Detri

$$101 : 100 = 3000 \text{ Rthlr.} ?$$

in Anwendung nehmen, welche den baaren Werth

$$3000 \times \frac{100}{101} = 2970\frac{30}{101} \text{ Rthlr.}$$

zur Antwort giebt.

Legt man diesen wieder zu 1 pCt. auf Zinsen, so kommen $29\frac{1}{101}$ Rthlr. für die Zinsen heraus, und diese zu $2970\frac{30}{101}$ Rthlr. gefügt; ergänzen das Kapital wieder zu 3000 Rthlr.

Sucht man nur das Disconto, so setzt man im vorliegenden Fall

$$101 : 1 = 3000 \text{ Rthr.}$$

und erhält dafür $\frac{3000}{101} = 29\frac{71}{101}$ Rthlr. und diese von 3000 Rthlr. abgezogen, lassen den baaren Werth $2970\frac{30}{101}$ wie vorhin gefunden, zum Rest.

Um das rechtmäßige Disconto von dem Abzug nach Procenten zu unterscheiden, nennt man das erstere

im Französischen Escompte en dedans, und das andere Escompte en dehors. Wird aber das erstere nicht ausdrücklich ausgehalten, so wird in der Regel das andere verstanden.

Mit den vorgehenden Beispielen und der Befolgung des nachstehenden, wird man sich übrigens in jedem andern Fall des rechtmäßigen Discontos, oder der Bestimmung des baaren Werthes, einer auf Zeit gestellten Zahlung zurecht finden können.

Es werde zum Beispiel der baare Werth von fl. 1112¼ gesucht, die nach 4 Monat und 10 Tagen fällig sind, die Zinsen zu 6 pCt. angenommen.

Da die Zinsen zu 6 pCt. jährlich, für jeden Monat ½ pCt. und für jeden Tag $\frac{1}{60}$ pCt., folglich für 4. M. 10 Tage, $2\frac{1}{6}$ pCt. ausmachen, so setzt man

$104\frac{1}{6} : 100 = 1112\frac{1}{4}$?

oder $613 : 600 = 1112\frac{1}{4}$ und findet fl. $1088\frac{406}{613}$

Berechnet man hier zur Probe $2\frac{1}{6}$ pCt. von dem gefundenen Werth so erhält man . $23\frac{36025}{61300}$

welche dazu addirt, das ursprüngliche Kapital von fl. . . . . $1112\frac{1}{4}$ wieder hervorbringen.

2. Zur kürzeren Berechnung des Werthes einer Leibrente auf eine angenommene oder bestimmte Anzahl Jahre dient die Formel

$$S = kq, \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

worin k die Größe der Leibrente ausdrückt,

q den Bruch $\frac{100}{104}$, $\frac{100}{105}$, $\frac{100}{106}$ je nachdem der Zinsfuß zu 4, 5 oder 6 pCt. angenommen wird,

n die Anzahl der Jahre,

S die Summe der Werthe der successiven Zahlungen, oder den gesuchten baaren Werth der Leibrente für n Jahre.

Denn setzt man den Zinsfuß zum Beispiel zu $\frac{104}{100}$ fest, so drückt bekanntlich

$k = a.\left(\frac{104}{100}\right)^n$ die Größe aus zu der das Kapital a mit den Zinsen Zinsen in n Jahren anwächst, oder

$k = a\left(\frac{1}{q}\right)^n = \frac{a}{q^n}$ wenn man ganz allgemein $\frac{1}{q}$ für den Zinsfuß $\frac{104}{100}$ oder $\frac{105}{100}$ und so weiter annimmt.

Hiernach ist $a = kq^n$ der baare Werth eines gegebenen Geldbetrags k, der nach n Jahren fällig ist, wenn der Zinsfuß $\frac{1}{q}$ angenommen wird. Ist also k der Betrag der jährlichen Rente, so ist der Werth a desselben nach dem

1ten Jahre $= qk^1$
2ten " $= qk^2$
3ten " $= qk^3$
nten " $= qk^n$

und die njährige Summe ist

$S = q^1k + q^2k + q^3k \ldots\ldots + q^nk$
$= k(q^1 + q^2 + q^3 \ldots\ldots q^n)$

folglich nach der bekannten Summation der Reihen

$S = kq\frac{q^n - 1}{q - 1}$, weil hier q zugleich den 1ten Termin und den Quotient der Reihe vorstellt.

Setzt man nun für das angenommene Beispiel

$k =$ 1 als den Betrag der jährlichen Rente
$n =$ 20 für die Anzahl der Jahre, und
$q = \frac{100}{104}$

so verwandelt sich die obige Form in folgende

$$S = q \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = \frac{100}{104} \cdot \frac{\left(\frac{100}{104}\right)^{20} - 1}{\frac{100}{104} - 1}$$

$$= 0{,}96154 \cdot \frac{0{,}45639 - 1}{0{,}96154 - 1}$$

$$= 0{,}96154 \cdot \frac{54361}{3846}$$

$$= 13{,}59 \ldots\ldots$$

Setzt man aber $k = 100$ zum Beispiele, so kommt

$S = 1359$

3) Nach der Mortalitätstafel vom Lambert, ist das 43te Jahr dasjenige, wobei die künftige mittlere Lebensdauer von 21 Jahren anzunehmen ist, oder das mittlere Alter auf 64 steigt.

Das wahrscheinliche Alter geht dabei aber nur auf 63 Jahre und ist folglich um ein Jahr kürzer. Der Rentirer hat seiner Seits also ein Jahr weniger in Anschlag zu bringen, und nur auf den wahrscheinlichen Genuß der Leibrente während 19 Jahren zu rechnen. Der baare Werth einer 19jährigen Rente von 1 Rthlr. beträgt nur $13, \frac{13}{100}$ Rthlr.

Personen die nur ein mittelmäßiges Vermögen besitzen und auf keine Erben Rücksicht zu nehmen haben, werden durch den Vortheil eines größeren Einkommens dazu bewogen, ihre Kapitalien gegen Leibrenten umzusetzen.

Für 1379 Rthlr. zum Beispiel, bringen die jährlichen Interessen zu 4 pCt. nur 55 $\frac{13}{20}$ Rthlr. ein, anstatt der 100 Rthlr. nach der vorgehenden Berechnung, wenn sie auf eine Leibrente verwendet werden.

Um jährlich 500 Rthlr einnehmen zu können, darf man nach dieser Berechnung, nur 5 mal 1379 Rthlr., das ist 6895 Rthlr. in die Leibrentenkasse tragen; um

aber 500 Rthlr. für Intereſſen zu 4 pCt. zu ziehen, muß man im Beſitz eines Vermögens von 12500 Rthlr. ſeyn.

Um 100 Rthlr. für Intereſſen von 1379 Rthlr. zu erhalten, müßte dieſer Betrag zu $7\frac{1}{139}$ pCt. verzinſet worden ſeyn. Andere verſehen ſich und ihre Kinder mit Leibrenten um ſich mit derſelben auf den Fall unvorherzuſehender Unglücksfälle gegen Mangel zu ſchützen.

Die Leibrentenkaſſe muß alſo die gehörige Sicherheit hierzu darbieten, und wo nicht ſelbſt durch die Landesregierung geſtiftet, doch wenigſtens garantirt ſeyn, wenn ſie ein allgemeines Zutrauen erwerben ſoll.

Dem Staate ſelbſt kann die Unternehmung eines Leibrenteninſtituts als eines der wenigſt läſtigen Mittel dienen, eine Anleihe in kurzer Zeit zu Stande zu bringen, wenn es nach richtigen Principien berechnet wird.

Lacroix führt in ſeiner Anleitung zur Wahrſcheinlichkeitsberechnung (Traité élémentaire du calcul des probabilités 1816 p. 205) ein merkwürdiges Beiſpiel der Uibereilung an, welches die franzöſiſche Finanzverwaltung bei der Stiftung der Leibrenten von 1780 gab. Man ſetzte den Preis nicht nur nach den Reſultaten der allgemeinen Mortalitätstafeln an, ſondern auch ganz allgemein für jede Altersklaſſe ohne Unterſchied feſt. Sogleich beeilten ſich mehrere Banquiers zu Genf ihren Nutzen davon zu ziehen.

Nach dem Anſatz der Renten, kamen 9 pCt. jährlicher Intereſſen dabei heraus; die Genfer Banquiers vereinigten ſich zu einer gemeinſchaftlichen Kaſſe, nahmen große Kapitalien dazu auf, welches ihnen um ſo leichter wurde, da ſie Intereſſen zu 7 pCt. anbieten konnten. Die übrigen 2 pCt. wurden wieder zu 5 pCt. zu Zinſen-Zinſen angelegt, und hierdurch konnten ſie in Zeit von

26 Jahren, die ganze Auslage für die gekauften Leibrenten wieder heraus ziehen. Diese Leibrenten ließen sie auf die Köpfe einer Anzahl junger Frauenzimmer einschreiben die von Aerzten auserlesen waren als solche, welche mit einer dauerhaften Konstitution beglückt, die gewöhnlichen Kinder-Krankheiten schon überstanden hatten, nicht über 20 Jahre alt waren und deren Aufführung sie konnten bewachen lassen. Das weibliche Geschlecht übertrifft das männliche zu Genf, in der mittlern Lebensdauer, die 20 jährigen Frauenzimmer haben daselbst im Allgemeinen die mittlere Lebensdauer von 40 Jahren, oder das mittlere Alter von 60 Jahren für sich, und es ist demnach keinem Zweifel unterworfen, daß die auserwählten Personen noch über 40 Jahre leben mußten, so daß den Speculanten noch mehr als die nöthige Zeit überlassen war, ihr ausgelegtes Kapital zu verdoppeln.

Die Leibrenten werden gewöhnlich so angesetzt, daß auch der Minderbemittelte Antheil daran nehmen kann. Dem Reicheren steht es frei, so viel Renten in seiner Person zu vereinigen als er Lust hat. So vereinigte Renten müssen nicht mit denjenigen verwechselt werden, die man zusammengesetzte Renten nennt, denn dieß sind solche, die man von dem Leben mehreren Personen abhängen läßt und so lang bezahlt, als noch eine Person davon oder auch eine bestimmte Anzahl davon im Leben ist, und gehören eigentlich zu den Tontinen, wovon im Folgenden die Rede seyn wird.

Nro. 45. Einrichtung einer Mortalitäts-Tafel II. zur bequemen Berechnung der Leibrenten.

1) In dieser Tafel, aus der Einleitung zur Berechnung der Leibrenten von Nic. Tetens, wird das höchste

Alter auf 95 Jahre gesetzt, da es nur äußerst selten höher gebracht wird.

Die 1ste Spalte enthält die Jahre der Altersklassen.

Die 2te Spalte enthält die am Anfang des Jahres noch Lebenden von jeder Altersklasse.

Die 3te Spalte enthält die successiven Summen der Zahlen der 2ten Spalte von unten herauf gerechnet. Diese Summen zeigen die zusammengerechneten Lebensjahre an, welche die entsprechende Altersklassen noch zu durchleben haben. (Siehe Nro. 42.) Jede Summe zeigt nämlich die Anzahl dieser Lebensjahre für die, in die zunächst vorgehende Altersklasse getretene, Anzahl von Personen an, denn nach der Einrichtung dieser Tafel, treten zum Beispiel 300 Personen in den Anfang des 50ten Lebensjahres, es sterben aber auch sogleich wieder 9 Personen von denselben ab und es bleiben demnach nur 291 Personen übrig, deren bevorstehende Lebensjahre eigentlich nur zu summiren sind, wofür man neben 291 zum Anfang des folgenden Jahres 5234 findet. Dividirt man demnach mit 300 in 5234, so erhält man die künftige mittlere Lebensdauer jeder Person, welche das 50 Jahr angetreten hat. Zur Verbesserung der mittlern Lebensdauer muß man aber bei der gegenwärtigen Einrichtung der Tafel, wegen der Voraussetzung, daß alle Sterbende zugleich im Anfang des Jahres abgehen, ½ Jahr zusetzen, indem es wahrscheinlicher ist, daß eben so viele vor als nach der Mitte des Jahres sterben, wonach man dann im Durchschnitt genommen das Alter eines jeden in der mittleren Lebensdauer um ½ Jahr höher setzen kann.

Die 4te Spalte enthält die discontirten Werthe der sämmtlichen Zahlungen von 1 Rthlr. an die Lebenden nach jedem Jahre, den Zinsfuß zu 4 pCt. angenommen.

Es wird dabei angenommen, daß jedes der 1000 neugebornen Kinder zu dem Empfang der jährlichen Rente von 1 Rthlr. berechtigt sey. Die Kasse hat also am Ende des ersten Jahres 750 Rthlr. an die noch lebenden 750 Kinder auszuzahlen, wofür der baare Werth, nach dem Disconte zu 4 pCt. 721 $\frac{1}{100}$ Rthl. ausmacht. Am Ende des 2ten Jahres, hat die Kasse an die noch lebenden 661 Kinder, 661 Rthlr. auszuzahlen, wofür der baare Werth 611 $\frac{1}{100}$ Rthlr. beträgt. Dies sind die beiden ersten Zahlen der 4ten Spalte, und eben so die Folgenden zu verstehen.

Die 5te Spalte enthält die successiven Summen der Zahlen der 4ten Spalte, von unten herauf gerechnet. Die Endzahl $\frac{1}{100}$ ist also der baare Werth, der im Jahr 94 auszuzahlenden Rente.

Die hierauf folgende Zahl $\frac{1}{100}$ giebt den baaren Werth der im Jahre 93 auszuzahlenden Renten an, und so fortschreitend giebt jede höhere Summe den baaren Werth der Renten für die vorjährige Altersklasse an. Um hiernach den Werth der einzelnen Rente für jedes Alter zu finden, darf man also nur die Zahl bei diesem Alter aus der 4ten Spalte nehmen, und damit in die Zahl dividiren, die man in der nächst folgenden Stelle der 5ten Spalte findet.

Sucht man z. B. den Werth der Leibrente von 1 Rthlr. für ein neugebornes Kind, so dividirt man mit 1000 in die Zahl 11431 $\frac{1}{100}$ der nächst niedrigen Stelle der 5ten Spalte und erhält dafür 11, $\frac{1}{100}$ Rthlr.

Oder sucht man, welchen Preis die Leibrenten-Kasse für eine Leibrente von 1 Rthlr., von einer Person fordern wird, die ihr zwanzigstes Lebensjahr angetreten hat, so nimmt man aus der 4ten Spalte bei dem Jahr 20, die Zahl 224,09 und dividirt damit in die Zahl 3762,49 der

5ten Spalte bei dem Jahr 21; wodurch man den Preis von $16\frac{79}{100}$ Rthlr. erhält. Ist es aber eine größere Leibrente, deren Preis man sucht, so hat man den erhaltenen Quotient noch mit der Größe derselben zu multipliciren. Soll zum Beispiel die jährliche Rente in dem obigen Fall 100 Rthlr. betragen, so multiplicirt man den Quotient 16 79/100 mit 100 und erhält nun 1679 Rthlr. für den gesuchten baaren Werth oder Preis der Leibrente.

Nro. 46. Gebrauch der Tafel III. der discontirten Werthe eines Kapitals = 1, auf 1 bis 100 Jahre, nach dem Zinsfuß zu 6, 5, 4 und 3 pCt.

1) Um die Ergebnisse der 4ten und 5ten Spalte der vorigen Tafel auf den Zinsfuß zu 6, 5 und 3 pCt. zu reduziren, darf man die Werthe der Tafel III. nur der Ordnung nach mit der Anzahl der in jedem Alter noch lebenden Personen multipliciren. Hiermit erhält man die Zahlen für die 4te Spalte der II. Tafel und durch die successive Addition derselben von unten herauf, die Zahlen für die 5te Spalte, denn es ist ganz gleichgültig, ob man z. B., wie es zum Anfang erforderlich ist, 750 Rthlr. auf 1 Jahr discontirt oder das Disconto für 1 Rthlr. mit 750 multiplicirt.

Der discontirte Werth von 1 Rthlr. zu 4 pCt. auf 1 Jahr, ist nach der Tafel III. = 0,9615384 und dieser mit 750, als der Anzahl der einjährigen Kinder, multiplicirt, bringt die Zahl 721 15/100 der 4ten Spalte in der II. Tafel hervor. Der Werth von 1 Rthlr. zu 4 pCt. auf 2 Jahre, ist ferner nach der III. Tafel = 09245564 und dieser mit der Anzahl 661 der zweijährigen Kinder multi-

plicirt, bringt die folgende Zahl 611 13/100 der 4ten Spalte der II. Tafel hervor, und auf eben diese Art entstehen die übrigen Zahlen der 4ten Spalte. Verfährt man nun eben so mit den Werthen der Tafel III. für 6, für 5 und 3 pCt., so erhält man die hierauf reduzirten Preise der Leibrenten von 1 Rthlr.

Sucht man z. B. den baaren Werth eines nach 9 Jahren fälligen Kapitals von 1125 Ducaten nach dem Zinsfuß zu 5 pCt., so nimmt man aus der Spalte für 5 pCt. die bei dem 9ten Jahre stehende Zahl 0,644609, multiplicirt dieselbe mit 1125 und erhält das Produkt von 725 185/1000 Ducaten zur Antwort, wenn man es bei den Tausendstel will bewenden lassen, oder genauer 725,185125 Ducaten.

Tafel II.

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl der Lebenden.	3. Summen der künftigen Lebens-Jahre.	4. Discontirte Werthe der Zahlen der 2ten Spalte zu 4 pCt.	5. Successive Summen der Zahlen der 4ten Spalte.
0	1000	28988	1000	12431,48
1	750	27988	721,15	11431,48
2	661	27538	611,13	10710,33
3	618	26277	549,40	10099,20
4	593	25959	560,90	9549,80
5	579	25366	475,90	9045,90
6	567	24787	448,11	8567,00
7	556	24220	422,51	8118,89
8	547	23664	399,69	7696,38
9	539	23117	378,69	7296,69
10	532	22578	359,40	6918,00
11	527	22046	342,33	6558,60
12	523	21519	326,66	6216,27
13	519	20996	311,70	5889,61
14	515	20477	297,40	5577,91
15	511	19962	283,74	5280,51
16	507	19451	270,69	4996,77
17	503	18944	258,23	4726,08
18	499	18441	246,32	4367,85
19	495	17942	234,95	4221,53
20	491	17447	224,09	3986,58
21	486	16956	213,27	3762,49
22	481	16470	202,96	3549,22
23	476	15989	193,13	3346,26
24	471	15513	183,75	3153,13

Tafel II.

(Fortsetzung.)

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl der Lebenden.	3. Summen der künftigen Lebensjahre.	4. Discontirte Werthe der Zahlen der 2ten Spalte zu 4 pCt.	5. Successive Summen der Zahlen der 4ten Spalte.
25	466	15042	174,80	2969,38
26	461	14576	166,28	2794,58
27	456	14115	158,15	2628,30
28	451	13659	150,40	2470,15
29	445	13208	142,69	2319,75
30	439	12763	135,35	2177,06
31	433	12324	128,37	2041,71
32	427	11891	121,72	1913,34
33	421	11464	115,39	1791,62
34	415	11043	109,37	1676,23
35	409	10628	103,65	1566 86
36	402	10219	97,95	1463,21
37	395	9817	92,55	1365,26
38	388	9422	87,41	1272,71
39	381	9034	82,53	1185,30
40	374	8653	77,90	1102,77
41	367	8279	73,50	1024,87
42	360	7912	69,33	951,37
43	353	7552	65,36	882,04
44	346	7199	61,60	816 68
45	339	6853	58,04	755,08
46	332	6514	54,65	691,04
47	324	6182	51,28	642,39
48	316	5858	48,09	591,11

Tafel II.

(Fortsetzung.)

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl der Lebenden.	3. Summen der künftigen Lebensjahre.	4. Discontirte Werthe der Zahlen der 2ten Spalte. zu 4 pCt.	5. Successive Summen der Zahlen der 4ten Spalte.
49	308	5542	45,07	543,02
50	300	5234	42,21	497,95
51	291	4934	39,37	455,74
52	282	4643	36,69	416,37
53	273	4361	34,15	379,68
54	264	4088	31,75	345,53
55	255	3824	29,49	313,78
56	246	3569	27,36	284,29
57	237	3323	25,34	256,93
58	228	3086	23,44	231,59
59	219	2858	21,65	208,15
60	210	2639	19,96	186,60
61	201	2429	18,37	166,54
62	192	2228	16,87	148,17
63	182	2036	15,38	131,30
64	172	1854	13,98	115,92
65	162	1682	12,66	101,94
66	152	1520	11,42	89,28
67	142	1368	10,26	77,86
68	132	1226	9,17	67,60
69	122	1094	8,15	58,43
70	112	972	7,19	50,28
71	103	860	6,36	43,06
72	94	757	5,58	36,73

Tafel II.

(Fortsetzung.)

1. Alters-Jahre.	2. Anzahl der Lebenden.	3. Summen der künftigen Lebensjahre.	4. Discontirte Werthe der Zahlen der 2ten Spalte zu 4 pCt.	5. Successive Summen der Zahlen der 4ten Spalte.
73	85	663	4,85	31,15
74	77	578	4,23	26,30
75	69	501	3,64	22,07
76	62	432	3,15	18,43
77	55	370	2,68	15,28
78	49	315	2,30	12,60
79	43	266	1,94	10,30
80	37	223	1,61	8,36
81	32	186	1,33	6,75
82	28	154	1,12	5,42
83	24	126	0,93	4,30
84	20	102	0,74	3,37
85	17	82	0,61	2,63
86	14	65	0,48	2,02
87	12	51	0,40	1,54
88	10	39	0,32	1,14
89	8	29	0,24	0,82
90	6	21	0,18	0,58
91	5	15	0,14	0,40
92	4	10	0,11	0,26
93	3	6	0,08	0,15
94	2	3	0,05	0,07
95	1	1	0,02	0,02

Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 6 pCt.	Zu 5 pCt.
1	0 9433960	0 9523809
2	0,8899964	0,9070290
3	0,8396190	0,8638375
4	0,7920933	0,8227030
5	0,7472580	0,7835260
6	0,7033388	0,7462150
7	0,6650567	0,7106812
8	0,6274120	0,6768392
9	0,5918987	0,6446090
10	0,5583943	0,6139130
11	0,5267871	0,5846790
12	0,4969690	0,5568370
13	0,4688385	0,5303213
14	0 4423005	0,5050680
15	0,4172644	0,4810170
16	0,3936457	0,4581115
17	0,3713638	0,4362960
18	0,3503433	0,4155207
19	0,3305125	0,3957340
20	0,3118042	0,3768990
21	0,2941543	0,3589420
22	0,2775046	0,3418500
23	0,2617967	0,3255710
24	0,2468780	0,3100680
25	0,2329981	0,2953300

Fortsetzung der Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 6 pCt.	Zu 5 pCt.
26	0,2198095	0,2812408
27	0,2073675	0,2678483
28	0,1956296	0,2555940
29	0,1845563	0,2429460
30	0,1741097	0,2313775
31	0,1642544	0,2203590
32	0,1549570	0,2098660
33	0,1461858	0,1998725
34	0,1379111	0,1903550
35	0,1301048	0,1812903
36	0,1227404	0,1726574
37	0,1157928	0,1644356
38	0,1092385	0,1566054
39	0,1030551	0,1491480
40	0,0972218	0,1420457
41	0,0917187	0,1352818
42	0,0865271	0,1288395
43	0,0816293	0,1227042
44	0,0770088	0,1168614
45	0,0726498	0,1112965
46	0,0685375	0,1059964
47	0,0645680	0,1009489
48	0,0609981	0,0961421
49	0,0575454	0,0915639
50	0,0542881	0,0872037

Fortsetzung der Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 6 pCt.	Zu 5 pCt.
51	0,0512152	0,0830511
52	0,0483162	0,0790963
53	0,0455813	0,0753299
54	0,0430012	0,0717427
55	0,0405672	0,0683264
56	0,0382709	0,0650727
57	0,0361045	0,0619740
58	0,0340610	0,0590229
59	0,0321330	0,0562123
60	0,0303141	0,0535355
61	0,0285982	0,0509862
62	0,0269795	0,0485583
63	0,0254523	0,0462459
64	0,0240116	0,0440438
65	0,0226525	0,0419465
66	0,0213703	0,0399490
67	0,0201606	0,0380466
68	0,0190194	0,0362349
69	0,0179429	0,0345094
70	0,0169272	0,0328662
71	0,0159691	0,0313011
72	0,0150652	0,0298106
73	0,0142124	0,0283910
74	0,0134079	0,0270390
75	0,0126490	0,0257515

Fortsetzung der Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 6 pCt.	Zu 5 pCt.
76	0,0119330	0,0245252
77	0,0112578	0,0233574
78	0,0106203	0,0222451
79	0,0100192	0,0211858
80	0,0094520	0,0201769
81	0,0089170	0,0192162
82	0,0084123	0,0183011
83	0,0079361	0,0174296
84	0,0074869	0,0165996
85	0,0070631	0,0158092
86	0,0066633	0,0150564
87	0,0062861	0,0143394
88	0,0059303	0,0136566
89	0,0055946	0,0130062
90	0,0052779	0,0123869
91	0,0049792	0,0117971
92	0,0046973	0,0112353
93	0,0044315	0,0107003
94	0,0041806	0,0101908
95	0,0039440	0,0097054
96	0,0037207	0,0092433
97	0,0035101	0,0088031
98	0,0033114	0,0083839
99	0,0031240	0,0079847
100	0,0029471	0,0076044

Fortsetzung der Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 4 pCt.	Zu 3 pCt.
1	0,9615384	0,9708738
2	0,9245564	0,9425960
3	0,8889979	0,9151418
4	0,8548026	0,8884872
5	0,8219276	0,8626090
6	0,7903150	0,8374866
7	0,7599182	0,8130919
8	0,7306908	0,7894098
9	0,7025877	0,7664153
10	0,6755649	0,7440938
11	0,6495817	0,7224216
12	0,6245979	0,7013799
13	0,6005749	0,6809515
14	0,5774759	0,6611117
15	0,5552013	0,6418620
16	0,5339090	0,6231671
17	0,5133740	0,6050167
18	0,4936290	0,5873950
19	0,4746432	0,5702862
20	0,4563879	0,5536760
21	0,4388345	0,5375744
22	0,4219562	0,5219168
23	0,4057272	0,5067153
24	0,3901222	0,4919566
25	0,3751177	0,4776280

Fortsetzung der Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 4 pCt.	Zu 3 pCt.
26	0,3606901	0,4637164
27	0,3468175	0,4502120
28	0,3334782	0,4370973
29	0,3206523	0,4243663
30	0,3083195	0,4119865
31	0,2964610	0,3999870
32	0,2850588	0,3882370
33	0,2740950	0,3770261
34	0,2635630	0,3660449
35	0,2534163	0,3553833
36	0,2436699	0,3450323
37	0,2342971	0,3349821
38	0,2252862	0,3252396
39	0,2166213	0,3157660
40	0,2082898	0,3065682
41	0,2002786	0,2976383
42	0,1925757	0,2889686
43	0,1851691	0,2805514
44	0,1780470	0,2723793
45	0,1711992	0,2644455
46	0,1646145	0,2567425
47	0,1582832	0,2492640
48	0,1521955	0,2420033
49	0,1463417	0,2349542
50	0,1407132	0,2281156

Fortsetzung der Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 4 pCt.	Zu 3 pCt.
51	0,1353014	0,2214659
52	0,1300973	0,2150149
53	0,1250936	0,2087519
54	0,1202820	0,2026713
55	0,1156561	0,1967678
56	0,1112071	0,1910440
57	0,1069306	0,1854893
58	0,1028178	0,1800887
59	0,0988633	0,1748415
60	0,0950609	0,1697490
61	0,0914047	0,1648049
62	0,0878891	0,1599679
63	0,0845088	0,1553086
64	0,0812581	0,1507851
65	0,0781331	0,1463933
66	0,0751280	0,1421295
67	0,0722385	0,1379897
68	0,0694601	0,1339706
69	0,0667886	0,1300887
70	0,0642198	0,1262802
71	0,0617498	0,1226049
72	0,0593747	0,1190340
73	0,0570912	0,1155670
74	0,0548953	0,1122009
75	0,0526626	0,1089329

Fortsetzung der Tafel III.

Die baaren Werthe eines Kapitals = 1, discontirt mit den Zinses-Zinsen.

Für Jahre.	Zu 4 pCt.	Zu 3 pCt.
76	0,0507538	0,1057619
77	0,0488018	0,1026797
78	0,0469248	0,0996891
79	0,0451200	0,0967855
80	0,0433846	0,0939775
81	0,0417160	0,0912403
82	0,0401115	0,0885828
83	0,0385688	0,0860027
84	0,0370853	0,0834978
85	0,0356590	0,0810658
86	0,0342875	0,0787047
87	0,0329687	0,0764123
88	0,0317007	0,0741867
89	0,0304814	0,0720259
90	0,0293091	0,0699281
91	0,0281818	0,0678914
92	0,0270979	0,0659139
93	0,0260557	0,0639941
94	0,0250537	0,0621327
95	0,0240899	0,0603206
96	0,0231634	0,0585637
97	0,0222725	0,0568580
98	0,0214159	0,0552019
99	0,0205922	0,0535941
100	0,0198002	0,0520327

Nro. 47. Von den Tontinen.

Im Jahr 1689 errichtete Lorenz Tonti in Frankreich für königliche Rechnung, eine Leibrentenkasse auf den Längstlebenden, Jeder Theilnehmer zog, gegen die Einlage von 300 Livres, eine bestimmte jährliche Rente bis zum Absterben aller anderen aus seiner Altersklasse, wonach er allein die denselben zugestandenen und nach Maßgabe des Alters beim Eintritt regulirten Renten, bis an sein Ende bekam. Im Jahre 1726 starb ein Frauenzimmer von dieser Gesellschaft im Alter von 96 Jahren, welche als die Erbin ihrer Klasse eine Rente von 73500 Livres genossen hatte.

Tonti selbst war nicht der Erfinder des Projectes, sondern nur der Erste, der es im Großen ausführte, und daher wurden alle ähnliche Anstalten Tontinen genannt, und die Theilhaber Tontinisten.

Diese Anstalten können begreiflich auf mancherlei Bedingungen zu Stande kommen, es sey nun, daß sie durch einen einzigen Unternehmer (Tontinarius) als endlichen Erben der eingelegten Kapitalien, unter der Garantie der Landesregierung gestiftet werden, oder auf Rechnung der Staatskasse, oder auf gemeinschaftliche Rechnung einer zu dieser Absicht zusammengetretenen Gesellschaft. Die Theilhaber können sich ein für allemal durch den festgesetzten Beitrag, oder auch durch allmählige Beiträge einkaufen.

„Tontinen", sagt der genannte Verfasser der Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen, „sind gesellschaftliche Renten, die unter den Interessenten, welche gewöhnlich von gleichem Alter genommen „werden, nach Kopfzahl zu vertheilen sind, bis endlich der „zuletzt Lebende sie allein ganz empfängt. Dieß ist das

„Wesentliche. Das Uibrige läßt sich nach Willkühr auf „verschiedene Art einrichten. Der Hauptpunkt ist auf Sei„ten des Unternehmers, zu wissen, wie hoch er die Renten „setzen könne? Es ist klar, daß der Werth der an die Ge„sellschaft bis zu ihrem gänzlichen Aussterben zu zahlenden „Renten so groß sey, als der Rentenwerth für den Längst„lebenden aus den gegebenen Mitgliedern. Dafür kann, „wo die Zahl der Personen groß ist, der Werth einer Zeit„rente auf die Dauer des Längstlebenden, und weil diese „Dauer, bei einer großen Anzahl von Personen wenig von „der Altersergänzung *) verschieden ist, der Werth der Zeit„rente auf die Altersergänzung genommen werden. Zu „Gunsten der Kasse muß etwas gerechnet werden. Niedri„ger darf sie hingegen auch nicht bemerklich angeschlagen „werden, es sey denn die Zahl der Personen geringer als „die Altersergänzung; denn in diesem Fall wird sie auf die „obige Art merklich zu hoch geschätzt. Höher aber gar nicht, „als etwa um so viel, als für die Verwaltungskosten in „Anschlag zu bringen ist, sonst werden die Interessenten „bevortheilt. Das zweite worauf es am nächsten ankommt, „ist die Bestimmung der Werthe der Erwartung eines Ton„tinisten. Ist die Zahl der lebenden Theiler sehr groß, so „kann man den besagten Werth nahe genug finden, wenn „man den Werth der ganzen Rente, wie im obigen Fall „einer Zeitrente auf die Altersergänzung gleich setzt, und „dann durch die Zahl der Personen dividirt. Es wird da„bei vorausgesetzt, daß diese Personen alle sehr nahe von „gleichem Alter sind.“

*) Die Ergänzung des Alters ist der Unterschied des gegenwärtigen Alters vom höchsten Lebensziele. Für einen Vierzigjährigen, zum Beispiel ist nach der Tafel II. die Altersergänzung 96 weniger 40, das ist 56 Jahre.

Eine der neueſten Anſtalten dieſer Art iſt die Hamburgiſche Verſorgungstontine, deren muſterhafte, und von den gewöhnlichen Gebrechen befreite Einrichtung, am beſten dazu geeignet iſt, einen richtigen Begriff von dem Zweck und Nutzen ſolcher Unternehmungen mitzutheilen.

Die Kaſſe wird für gemeinſchaftliche Rechnung der ganzen Geſellſchaft durch ihre Deputirte und erwählte Directoren verwaltet. Die Geſellſchaft iſt in VI Klaſſen eingetheilt. Die Actien können durch beſtimmte jährliche Beiträge, während einer nach dem Alter des Eintretenden beſtimmten Anzahl Jahre, oder auch ein für allemal durch einen einzigen Beitrag erlangt werden. Es wird in jeder Altersklaſſe eine gewiſſe Anzahl Leibrenten verloſet. Die durch Sterbfälle wieder frei kommenden Leibrenten, werden im Anfang des folgenden Jahrs unter diejenigen Mitglieder, die noch keine Leibrenten haben, durchs Loos abermals vertheilt. Auch werden jährlich durchs Loos verſchiedene Gewinne an die Intereſſenten vertheilt, denen noch keine Leibrente zugefallen iſt. Die Letztlebenden theilen endlich unter ſich in jeder Klaſſe den alsdann vorräthigen Kaſſenfond.

Die erſte Klaſſe nimmt diejenigen auf, welche das Alter von 6 bis 15 Jahren erreicht, und ſich deßhalb gehörig legitimirt haben. Die Mitglieder zahlen bis zum Verlauf von 36 Jahren 6 Mark 4 Schilling Banco vierteljährig, oder 92 Mark Banco von 4 zu 4 Jahren zum voraus, oder ſie kaufen ſich ein für allemal durch den Beitrag von 466 Mark an. Die Anzahl der Mitglieder oder Actien iſt mit 2500 geſchloſſen.

Die zweite Klaſſe nimmt 2500 Mitglieder von 15 bis 23 Jahren auf. Dieſe zahlen 32 Jahre lang quartaliter 7 Mark 13 Schilling Banco, oder von 4 zu 4 Jahren 116 Mark Banco, oder ein für allemal 558 Mark Banco.

Die dritte Klasse besteht aus 2000 Actien, wofür die Theilhaber von 23 bis 32 Jahren, 28 Jahre lang, quartaliter 10 Mark, oder von 4 zu 4 Jahren 148 Mark, oder auf einmal 645 Mark Banco bezahlen.

Die vierte Klasse enthält 2000 Actien, deren Theilhaber von 32 bis 40 Jahren, während 24 Jahren quartaliter 12 Mark 8 Schilling, oder von 4 zu 4 Jahren 184 Mark oder auf einmal 710 Mark Banco beitragen.

Die fünfte Klasse begreift nur 1000 Actien, wofür die Besitzer von 40 bis 47 Jahren, während 20 Jahren, quartaliter 15 Mark 12 Schilling, oder von 4 zu 4 Jahren 270 Mark, oder auf einmal 896 Mark Banco beitragen.

Die sechste Klasse besteht wie die vorige aus 1000 Actien, und die Eigenthümer derselben von 47 bis 54 Jahren, zahlen während 17 Jahren, vierteljährig 21 Mark, und noch 1 Jahr lang vierteljährig 18 Mark, oder von 4 zu 4 Jahren 302 Mark, oder ein für allemal 875 Mark Banco.

Dagegen werden durchs Loos ausgetheilt:

I.

In der I. Klasse

1	Leibrente von	2000 Mark Banco.*)
1	" "	1200 " "
1	" "	1000 " "
3	Leibrenten zu 750	2250 " "
4	" " 500	2000 " "
6	" " 400	2400 " "
8	" " 300	2400 " "
20	" " 200	4000 " "
33	" " 150	4950 " "
48	" " 100	4800 " "
125	Leibrenten, zusammen betragen	27000 Mark Banco.

Ferner werden jährlich unter die Interessenten die noch keine Leibrente haben, 20 Gewinne zu 150 Mark, zusammen 3000 Mark durchs Loos vertheilt.

Nachdem die Beiträge aufhören, werden keine Gewinne mehr gezogen, dagegen werden unter alle lebende Interessenten dieser Klasse die noch keine Leibrente ziehen, während der nun folgenden 29 Jahre jährlich 3000 Mark Banco vertheilt. Nach Verlauf dieser Zeit erhalten alle Interessenten der I. Klasse, die noch leben und keine Leibrenten haben, so viel als die kleinste Leibrente in dieser Klasse ausmacht, während einer Reihe von 4 Jahren.

Von nun an wird jährlich bis zur Beendigung der Tontine, die Summe von 40000 Mark Banco an Leibrenten unter alle Mitglieder der Klasse vertheilt.

*) 1 Mark Banco beträgt beiläufig 44 kr. C. M.

Die Tontine ist beendigt, sobald in jeder Klasse nur noch so viele Mitglieder leben, daß jeder 100000 Mark bekommen kann.

Nach den Gründen der Wahrscheinlichkeit trifft dieses ein, wenn von der ersten Klasse noch 4, von der zweiten noch 12, von der dritten noch 6, von der vierten noch 11, von der fünften noch 4 und von der sechsten nur noch 4 Mitglieder am Leben sind. Diese Längstlebenden theilen dann unter sich in jeder Klasse den vorräthigen Fond, und es erhält jeder wenigstens 100000 Mark Banco.

II.

In der II. Klasse vertheilt das Loos:

1	Leibrente	zu	. . .	2000	Mark	Banco.
1	"	"	. . .	1200	"	"
2	"	zu	1000 .	2000	"	"
3	"	"	750 .	2250	"	"
5	"	"	500 .	2500	"	"
5	"	"	450 .	2250	"	"
8	"	"	300 .	2400	"	"
20	"	"	200 .	4000	"	"
20	"	"	180 .	3600	"	"
20	"	"	150 .	3000	"	"
40	"	"	120 .	4800	"	"
125	Leibrenten.			30000	Mark	Banco.

Es werden 20 Gewinne zu 200 Mark, zusammen 4000 Mark Banco, jährlich unter diejenigen dieser Klasse vertheilt, die noch keine Leibrenten haben.

Nach dem Verlauf von 32 Jahren, wird kein Beitrag mehr gefordert, und während der folgenden 25 Jahre die Summe von 34000 Mark Banco jährlich unter

die Mitglieder vertheilt, die noch keine Leibrenten gezogen haben.

Während der nachfolgenden 3 Jahre erhalten diejenigen, die noch immer keine Leibrenten haben, so viel als die kleinste Leibrente der Klasse beträgt. Nach diesen 3 Jahren werden jährlich bis zur Beendigung der Tontine 5000 Mark Banco unter alle noch lebenden Mitglieder dieser Klasse vertheilt. Die letztlebenden 12 Interessenten, erhalten zum Beschluß, jeder 100000 Mark Banco, wie bei der Vertheilung der Kasse der vorgehenden Klasse angegeben.

III.

Unter die Mitglieder der III. Klasse vertheilt das Loos:

1	Leibrente	zu . . .	2000	Mark	Banco.
1	"	" . . .	1200	"	"
1	"	" . . .	1000	"	"
2	"	" 750 sind	1500	"	"
4	"	" 500 "	2000	"	"
6	"	" 400 "	2400	"	"
10	"	" 300 "	3000	"	"
38	"	" 200 "	7600	"	"
62	"	" 150 "	9300	"	"
In 125	Leibrenten,	zusammen	30000	Mark	Banco.

Es werden 20 Gewinne zu 200 Mark, zusammen 4000 Mark Banco jährlich für diejenigen ausgespielt, die keine Leibrente gezogen haben.

Nach Verlauf von 28 Jahren hört der Beitrag auf und während der folgenden 21 Jahre wird die Summe von 30000 Mark Banco jährlich unter die noch lebenden, mit keiner Leibrente versorgten Mitglieder vertheilt.

Während der nachfolgenden 4 Jahre, erhalten diejenigen die noch keine Leibrente haben, so viel als die kleinste Leibrente dieser Klasse ausmacht. Nach diesen 4 Jahren werden jährlich bis zur Beendigung der Tontine, 44000 Mark Banco unter die noch lebenden Mitglieder dieser Klasse vertheilt.

Von den zuletzt lebenden 6 Interessenten, erhält jeder zum Beschluß 100000 Mark Banco, wie im Vorgehenden zu Ende der Vertheilung der Kasse erster Klasse angegeben.

IV.

Unter die Mitglieder der IV. Klasse vertheilt das Loos:

1	Leibrente	zu	.	.	.	.	2000	Mark Banco.
1	"	"	.	.	.	.	1200	" "
1	"	"	.	.	.	.	1000	" "
2	"	"	750	Mark	sind		1500	" "
4	"	"	500	"	"		2000	" "
6	"	"	400	"	"		2400	" "
10	"	"	300	"	"		3000	" "
38	"	"	200	"	"		7600	" "
62	"	"	150	"	"		9300	" "
In 125	Leibrenten,	zusammen					30000	Mark Banco.

Es werden überdieß jährlich für die Interessenten, die noch keine Leibrente gezogen haben, 20 Gewinne zu 200 Mark, zusammen 4000 Mark Banco ausgespielt.

Nach Verlauf von 24 Jahren hört der Beitrag in dieser Klasse auf, und während der nachfolgenden 16 Jahre wird die Summe von 36000 Mark Banco jährlich unter die Mitglieder vertheilt, die noch mit keiner Leibrente versorgt sind.

Während der hierauf folgenden 3 Jahre erhalten

die noch unversorgten Interessenten, so viel als die kleinste Leibrente ihrer Klasse ausmacht.

Nach Verlauf dieser 3 Jahre werden jährlich bis zur Beendigung der Tontine 50000 Mark Banco unter die noch übrigen Mitglieder dieser Klasse vertheilt.

Von den zuletzt lebenden 11 Interessenten empfängt jeder zum Beschluß 100000 Mark Banco, wie im Vorgehenden angegeben.

V.

In der V. Klasse vertheilt das Loos:

1	Leibrente	zu . . .	2000	Mark	Banco.
1	"	"	1000	"	"
1	"	" . . .	800	"	"
1	"	" . . .	600	"	"
2	"	" 500 .	1000	"	"
1	"	" 350 .	350	"	"
73	"	" 250 .	18250	"	"
In 80	Leibrenten,	zusammen	24000	Mark	Banco.

Es werden 10 Gewinne zu 200 Mark, zusammen 2000 Mark Banco jährlich, für diejenigen ausgespielt, die noch keine Leibrenten haben.

Nach Verlauf von 20 Jahren hört der Beitrag auf, und während der folgenden 14 Jahre wird die Summe von 16000 Mark Banco unter diejenigen der Klasse vertheilt, die noch keine Leibrenten haben.

Während den nachfolgenden 2 Jahren erhalten diejenigen, die noch keine Leibrente haben, so viel als die kleinste Leibrente dieser Klasse ausmacht. Nach diesen 2 Jahren werden jährlich bis zur Beendigung der Tontine 32000

Mark Banco unter die noch lebenden Mitglieder dieſer Klaſſe vertheilt.

Von den zuletzt lebenden 4 Intereſſenten empfängt jeder zum Beſchluß 100000 Mark Banco, wie im Vorgehenden angegeben.

VI.

In der VI. Klaſſe wird durchs Loos vertheilt:

1	Leibrente	zu	. . .	2000	Mark Banco.
1	"	"	. . .	1000	" "
1	"	"	. . .	800	" "
1	"	"	. . .	600	" "
2	"	"	500 .	1000	" "
1	"	"	350 .	350	" "
73	"	"	250 .	18250	" "
In 80	Leibrenten,	zuſammen		24000	Mark Banco.

Für diejenigen die keine Leibrente bekommen haben, werden 2000 Mark in 10 Gewinnen zu 200 Mark ausgeſpielt.

Nach Verlauf von 18 Jahren hört der Beitrag auf, und während der folgenden 11 Jahre wird die Summe von 16000 Mark Banco unter diejenigen vertheilt, die noch keine Leibrente haben.

In dem nächſten Jahre erhalten diejenigen, die noch keine Leibrente haben, ſo viel als die kleinſte Leibrente dieſer Klaſſe ausmacht, und nach demſelben werden jährlich bis zur Beendigung der Tontine 32000 Mark Banco unter die noch lebenden Mitglieder dieſer Klaſſe vertheilt.

Von den zuletzt lebenden 4 Intereſſenten empfängt jeder zum Beſchluß 100000 Mark Banco, wie im Vorgehenden angegeben.

Uiberhaupt ist noch zu bemerken, daß die Leibrenten welche durch Sterbefälle frei kommen, wenn alle noch lebenden Interessenten schon Leibrenten haben, unter solche vertheilt werden, und zwar so, daß der dessen Leibrente mehr als dessen Antheil ausmacht, von der Theilung noch so lang ausgeschlossen bleibt, bis die andern gleichviel mit ihm erhalten, und daß demnach zum Beispiel jeder der ersten Klasse 2000 Mark Banco jährlich zieht, wenn diese bis auf 20 Mitglieder ausgestorben ist. Zur Deckung der Verwaltungskosten werden 10 pCt. von allen Zahlungen abgezogen.

Der ganze Plan ist auf das Discontiren mit dem Kassen-Fond zu dem mäßigen Zinsfuß von 3 pCt. berechnet. Alles was mehr einkommt, vermehrt den Nutzen der Gesellschaft. Hinsichtlich des Bestehens derselben, wurde die folgende Berechnung für die erste Klasse den Actionairs zur Beurtheilung vorgelegt.

Erstes Jahr. Die 2500 Actionairs zahlen vierteljährig jeder 6 Mark 4 Schilling, folglich alle zusammen jährlich	62500	Mk. Bco.
Hierzu kommen im Lauf des Jahres zu 3 pCt. an Zinsen.	1000	" "
Zusammen	63500	Mk. Bco.
Dagegen besteht die Ausgabe in 31 Leibrenten, diese betragen	6750	
20 Gewinne zu 150 Mrk.	3000	
	9750	" "
Fond der I. Klasse am Schluß des 1. Jahrs	53750	Mrk. Bco.

Fortsetzung		53750 Mk. Bco.
Es sterben im ersten Jahre nach den Sterblichkeitstabellen 52 von den 2500 Mitgliedern, dafür zahlt für das zweite Jahr das Institut selbst den Beitrag zu 25 Mark . . .	1300	
		52450 Mk. Bco.
Zweites Jahr. Einnahme von 2500 Mitgliedern zu 25 Mark	62500	
Bei diesen Zinsen im Lauf des Jahres	1000	
Ferner Zinsen von 52450 Mk. zu 3 pCt.	1573	
	65073	
		117523 Mk. Bco.
Ausgabe.		
31 Leibrenten von der ersten Ziehung	6750	
31 Leibrenten von der zweiten Ziehung 6750 doppelt .	13500	
20 Gewinne zu 150 . .	3000	
	23250	
Fond der I. Klasse am Schluß des 2ten Jahres		94273 Mk. Bco.
Drittes Jahr. Es sterben im Laufe des zweiten Jahres 48 Mitglieder, folglich leistet die Anstalt jetzt den Beitrag von 100 Todten zu 25 Mark .	2500	
		91773 Mk. Bco.

Fortsetzung		91773 Mk. Bco.
Einnahme 2500 Actien zu 25 Mark	62500	
Zinsen im Lauf des Jahrs zu 3 pCt.	1000	
Zinsen von 91773 Mark	2753	
		66253 . .
		158026 Mk. Bco.

Ausgabe.

62 Leibrenten von der erst. und zweiten Ziehung à 6750 Mk.	13500	
31 Leibrenten von der dritten Ziehung 6750 Mark, 3fach	20250	
20 Gewinne zu 150 Mark	3000	
		36750 . .
Fond der I. Klasse am Schluß des 3. Jahrs		121276 Mk. Bco.

Viertes Jahr. Es sterben im Laufe des dritten Jahrs 39 Mitglieder, folglich leistet die Anstalt jetzt den Beitrag von 139 Todten zu 25 Mark . . 3475 . .

117801 Mk. Bco.

Einnahme für 25 Actien zu 25 Mark	62500	
Zinsen im Lauf des Jahrs zu 3 pCt.	1000	
Zinsen von 117801 Mark zu 3 pCt.	3534	
		67034 . .
		184835 Mk. Bco.

Fortsetzung 184835 Mk. Bco.

Ausgabe.

93 Leibrenten von der ersten, zweiten und dritten Ziehung	20250	
32 Leibrenten von der vierten Ziehung zu 6750 Mark vierfach	27000	
20 Gewinne zu 150 Mark . .	3000	
		50250 . .

Fond der I. Klasse am Schluß des 4. Jahrs 134585 Mk. Bco.

Fünftes Jahr. Es sterben im vierten Jahr 35 Mitglieder, folglich leistet jetzt die Anstalt den Beitrag von 174 Todten zu 25 Mark 4350

130235 Mk. Bco.

Einnahme 2500 Actien zu 25 Mark	62500	
Zinsen im Lauf des Jahrs zu 3 pCt.	1000	
Zinsen von 130235 Mark zu 3 pCt.	3907	
		67407 . .

197642 Mk. Bco.

Ausgabe.

125 Leibrenten	27000	
20 Gewinne zu 150 . .	3000	
		30000 . .

Fond der I. Klasse am Schluß des 5. Jahrs, 167642 Mk. Bco.

Setzt man diese Berechnung nun für eine Folge von 36 Jahren fort, so findet man nach Ablauf dieser Zeit zu 3 pCt. Zinsen in der ersten Klasse ein vorräthiges Kapital von 1,476,432 Mark Banco, wovon alle Interessenten bis zu ihrem Tode Einnahme erhalten. An die Inhaber der Leibrente werden jährlich 27000 Mark Banko ausbezahlt, die übrigen noch lebenden Interessenten theilen sich jährlich in 30000 Mark Banco und die letzt lebenden erhalten 100000 Mark. Werden aber, wie es sehr wahrscheinlich ist, 4 pCt. Disconto gemacht, so befänden sich am Schluße des 36ten Jahres beinahe 50000 Mark Banco mehr in der Kasse dieſe Klasse, und es könnten den noch lebenden Interessenten weit größere Vortheile zufließen.

Jeder Interessent hat jährlich die Hoffnung, seine Einnahme durch eine Leibrente zu verbessern, weil jährlich einige Leibrenten durch Todesfälle frei werden, die das nächste Jahr unter diejenigen, die noch keine Leibrenten haben, verlooſet werden.

Alle übrigen Klassen sind auf ähnliche Art berechnet, und es finden sich zu 3 Cpt. Disconto in der Kasse der zweiten Klasse, nach 32 Jahren 1,807,195 Mark Banco, in der dritten nach 28 Jahren 1,490,256 Mark Banco, in der vierten Klasse nach 24 Jahren 1,216,195 Mark Banco, in der fünften Klasse nach 20 Jahren 919775 Mark Banco und in der sechsten Klasse nach 18 Jahren 880449 Mark Banco.

Es ist historisch gewiß, daß die sichersten und größten Kassen sich durch das Discontiren vornehmlich in Credit und Flor erhalten, und die Erfahrung der neuesten Zeiten zeigt, daß das Verlieren dabei äußerst selten ist, wenn die nöthige Vorsicht nicht außer Acht gelassen wird, und wenn dieses auch zuweilen Statt findet, so bringt der Umstand, daß die Zinsen von dem Kapital so-

gleich gekürzt und wieder benutzt werden, einen Gewinn heraus, welcher den möglichen Verlust weit übersteigt. Wenn aber Perioden eintreten wo der Disconto 6 bis 8 pCt. ist, so vermehrt sich das Kapital der Gesellschaft um ein Bedeutendes, da die mehr erübrigten Zinsen immer als ein Kapital zu betrachten sind, das wieder Zinsen auf Zinsen trägt. Weil jedoch die Möglichkeit eines Verlustes zugegeben werden muß, so hat jede Klasse ihren Sparfond, woraus ein solcher, obschon nicht wahrscheinlicher Verlust an die Haupt-Kasse ersetzt werden soll.

Dieser Sparfond entsteht folgenderweise. Gesetzt der Inhaber einer Leibrente von 1000 Mark Banco zum Beispiel, sterbe im Januar, Februar oder März, so erhalten seine Erben nur das 1ste Quartal von 250 Mark Banco ausbezahlt, und die übrigen 750 Mark Banco fallen für dieses Jahr dem Sparfond anheim, indem erst im Anfang des folgenden Jahres ein anderer Interessent durchs Loos die Leibrente erhält. Die Summen auf 27000 Mark Banco jährlicher Ausbezahlung, die auf diese Weise erspart werden, müssen mit der Zeit durch Zinsen auf Zinsen sehr bedeutend werden; sollte nun beim Discontiren ein Verlust entstehn, so wird er aus dieser Kasse ersetzt. Da zudem nach den Jahren des Beitrags nicht nur alle Zinsen des Kapitals bezahlt werden, sondern auch ein Theil des Kapitals selbst, so ist das Discontiren nöthig, damit das Kapital disponibel bleibe. Es ist darum auch vortheilhafter als Geld zu belegen, weil man bei eintretenden Kriegen und gefährlichen Situationen stets Herr darüber bleibt und es in Sicherheit bringen kann.

Die Interessenten jeder Klasse, wählen jährlich aus ihrer Mitte zwei Revisoren, welchen die Direction Rechnung ablegt, diese sehen die Bücher nach, und bescheinigen die Richtigkeit derselben durch ihre Unterschrift. Je-

des Mitglied erhält jährlich eine gedruckte Bilanz und Sterbeliste. Er kennt also jedes Jahr genau den Zustand der Anstalt, und braucht nur die Anzahl der noch lebenden Interessenten, in die Summe des jedesmaligen Bestandes seiner Klasse zu dividiren, um seinen Antheil daran zu berechnen.

In den von Landesregierungen garantirten Tontinen, theilen sich die lebenden Interessenten in die Zinsen des Kapitals, das Kapital selbst aber verfällt an die Staatskasse; in dieser Anstalt aber, erhalten die Actionairs nicht nur alle gewonnenen Zinsen, sondern auch die Zinsen auf Zinsen und das ganze eingeschlossene Kapital.

Zu den Hauptgebrechen, die ähnlichen Instituten verderblich waren, gehören die folgenden:

1) Räumt man den Interessenten gewöhnlich für den Anfang zu viele Vortheile ein, um sie anzulocken und die Anstalt bald vollzählig zu machen, so daß das Stammkapital nicht Zeit genug hat, sich zu vergrößern; es kann folglich in höhern Jahren, wo eine solche Anstalt den Interessenten hauptsächlich zur Versorgung dienen soll, nichts Bedeutendes dadurch geleistet werden, und die meisten dieser Anstalten fallen durch das was im Anfang zu viel bewilligt worden ist, in sich selbst zusammen.

2) Werden diese Anstalten nicht immer geschlossen, sondern sie nehmen stets neue Mitglieder auf, wodurch es unmöglich wird eine richtige Berechnung darüber aufzustellen.

3) Werden zu wenig Klassen eingeführt, wodurch der Altersunterschied in jeder Klasse zu groß ausfällt und

das richtigere Verhältniß der Sterblichkeit in der Berechnung aufgehoben wird *).

Obgleich die Interessenten der Hamburger Tontine bedeutende Vortheile erhalten — denn von den 2500 Mitgliedern der ersten Klasse erhalten 125 sogleich jährliche Renten, wovon die größte 2000 Mark und die kleinste 100 Mark ausmacht, und überdieß werden noch 20 Gewinne zu 150 Mark ausgelooset; auch nimmt die Wahrscheinlichkeit eine Leibrente zu ziehen, mit jedem Jahre zu, weil die Anzahl der Interessenten durch das Absterben immer geringer wird, die Anzahl der Leibrenten und Gewinne aber immer dieselbe bleibt — so wird doch jährlich ein ansehnliches Kapital zurückgelegt, damit nach den Jahren des Beitrags ansehnliche Vortheile für die Uiberlebenden bestimmt werden können.

4) Die meisten Berechnungen ähnlicher Anstalten sind äußerst verwickelt; die gegenwärtige ist einfach, einleuchtend und zuverlässig. Gesetzt sogar, es stürben weniger Interessenten, als in der Berechnung angenommen wurde, so ist der Beitrag jährlich auch für so viele Antheile größer, als weniger sterben, und das Kapital zu Ende der Beitragsjahre um so viel größer, so daß also auch das zu theilende Kapital um

*) Die Berechnung der ganzen Unternehmung wird nicht nur unsicherer hierdurch gemacht, sondern der Umstand, daß die vielen jüngeren Mitglieder eine viel größere Wahrscheinlichkeit haben, die glücklichsten ihrer Klasse zu werden, hält auch mehrere ältere Personen alsdann zurück, Antheil an der Tontine zu nehmen. In diesen beiden Rücksichten würde es also am besten seyn, wenn man ohne ein weitläuftigeres Detail der ganzen Einrichtung, die Klassen von Jahr zu Jahr könnte fortschreiten lassen; der bei der gegenwärtigen Tontine angenommene Zeitraum von 8 Jahren ist in der That schon fast zu bedeutend.

so viel vergrößert werden kann. Stürben hingegen mehrere, als nach der Voraussetzung, so ist zwar das Kapital um so viel kleiner, allein es leben dann auch um so viel Personen weniger, die Antheil an der Vertheilung nehmen, und der Zeitraum, worin jedes Mitglied eine Leibrente erhält, wird dadurch um so viel näher gerückt, folglich können dann auch mit wenigerem Kapital alle Verpflichtungen erfüllt werden.

Bemerkung.

Wer einer solchen Anstalt in der Absicht beitreten möchte, ein glänzendes Glück darin zu machen, der würde nicht klüger handeln, als wenn er durch die Lotterie reich werden wollte. Sehr richtig bemerkt der Verfasser der Einleitung in die Berechnung der Leibrenten, daß die einigen ihre Erwartungen zu hoch spannen, die gegenjenen so geringen Beitrag wie diese Anstalten ihn fordern, sich und den Ihrigen eine reichliche Versorgung zu verschaffen gedenken. Das wirklich wohlthätige derselben besteht aber darin, daß sie ihre Theilhaber vor Mangel schützen, wenn Altersschwäche und Unglücksfälle ihnen die nöthigen Mittel dazu entzogen hätten.

Die Gefahr, welcher der Unternehmer einer Tontine sich unterzieht, oder die Summe, die er verlieren und gewinnen kann, ist für eine gemeinschaftliche Kasse so groß nicht, obschon sie auch für diese noch sehr erheblich ist; es muß daher der wahre Werth der Renten nach richtigen Grundsätzen bestimmt werden. Was mehr gegeben wird, gereicht der Kasse zum Vortheil, was daran fehlt aber zum Nachtheil. Das Risico der Kasse ist größer bei dem Beitragsfuß, und es ist ein gemeiner Irrthum, daß bei einer größeren Anzahl von Interessenten weniger als bei einer kleineren gewagt werde, weil es wahrscheinlicher sey, daß das Absterben unter einer größeren Anzahl von Personen, sich genauer nach den Angaben der Mortalitätstafeln verhalten werde. Allerdings wird bei mehreren Personen der mittlere Werth unter den wirklichen Werthen, dem nach den Tabellen berechneten mittlern Werth näher kommen, als bei einer klei-

nern Zahl, allein dieß hindert nicht, daß bei mehreren Personen dennoch auch mehr verloren als gewonnen werden könne.

Das Risico auf jeden einzelnen Interessenten vertheilt, wird kleiner, wenn die Gesellschaft größer wird. Es wird nach Tetens's Bemerkung immer eher größer für die ganze Gesellschaft, als kleiner für jeden Einzelnen; woraus sich dann von selbst ergiebt, daß es in jedem Fall am zweckmäßigsten ist, wenn die Gesellschaft das Risico selbst übernimmt und sich selbst garantirt. Nur muß die Zahl der Interessenten dann nicht zu klein seyn.

Nro. 48. Von den Witwenkassen.

Die Witwenkassen können aus gezwungenen Beiträgen geschaffen werden, wie diejenigen, wozu man verheirathete Staatsdiener verbindet, oder Fabrikenarbeiter durch bestimmte Abzüge auf den verdienten Lohn anhält, damit ihre Witwen dem Staat oder dem Brodherrn nicht zur Last fallen. Hier ist von denjenigen Witwenkassen die Rede, wozu man sich zur Versorgung der Witwen freiwillig vereinigt. Die Bedingungen des Beitritts mögen seyn wie sie wollen, die Gesellschaft mag aus einer bestimmten Anzahl von Mitgliedern bestehen, und mit denselben aussterben, oder immer noch neue Mitglieder aufnehmen, und damit fortleben, so ist die Ausgleichung der Einnahmen und Ausgaben der Kasse stäts die Hauptsache der ganzen Einrichtung.

Zu dem Versorgungskapital kann jedes Mitglied entweder gleich bei seinem Eintritt den gehörigen Antheil ein für allemal erlegen, oder in bestimmten Zeitfristen abtragen, oder auch nach der Zahlung eines Antrittskapitals sich noch zu fortdauernden Beiträgen verbindlich machen. Das Kapital muß auf die bestmögliche Art benutzt, und in günstigen Perioden durch Zinsen auf Zinsen vergrößert werden, damit

es durch ungewöhnliche Ausgaben in unglücklichen Zeiten nicht erschöpft werde.

Soll keiner zum Nachtheil der übrigen Theilhaber begünstigt werden, so muß der Beitrag jedes Ehemannes nicht nur seinem Alter angemessen werden, sondern auch dem Unterschied zwischen seinem und der Gattin Alter; denn da es wahrscheinlich ist, daß die zwanzigjährige Ehefrau eines sechszigjährigen Mannes die Witwenkasse sicherer und länger in Anspruch nehmen werde, als die fünfzigjährige Frau eines Vierzigers, so ist es ganz natürlich, daß der erstere auch mehr dafür als der letztere einbringen müsse. Um hierzu aber die passenden Verhältnisse auszumitteln, können die allgemeinen Mortalitätstafeln nicht zweckmäßig in Anwendung genommen werden.

Es würde erwünscht seyn, wenn man schon die Erfahrungen älterer Witwenkassen benutzen, und Tabellen derselben zum Grund der Rechnung legen könnte; worin man folgende Angaben fände:

1) das Alter des Mannes
2) das Alter der Frau

bei dem Eintritt in die Gesellschaft nebst der Jahrzahl des Eintrittes;

3) das Alter des Mannes
4) das Alter der Frau

bei dem Ableben, nebst der Jahrzahl dieses Ereignisses, wodurch die Dauer ihrer Verbindung gegeben wäre;

5) das Jahr worin der Witwer und die Witwe wieder ein neues Ehebündniß antreten;
6) das Alter der Witwe bei der Versorgung, im ersten, im zweiten und folgenden Witwenstande, so wie die Zeit, worin die Versorgung wegen des Todes oder eines neuen Ehebündnisses wieder aufgehört hat.

Der Umstand, ob es eine aussterbende oder fort-

dauernde Gesellschaft ist, hat übrigens keinen Einfluß auf die Rechnung. Im letzten Fall bleibt immer die Möglichkeit vorhanden, daß keine neue Mitglieder weiter beitreten.

Es ist im Vorgehenden von der verschiedenen Sterblichkeit des männlichen und weiblichen Geschlechts schon die Rede gewesen. Aus diesem Grund können die allgemeinen Mortalitätstafeln, wo beide Geschlechter vereinigt sind, hier nicht in Anwendung kommen.

Nach der allgemeinen Bemerkung verhalten sich bei den Neugebornen, die Knaben zu den Mädchen, wie 105 oder 104 zu 100, bei den Erwachsenen aber wie 100 zu 107. Es müssen folglich in den mannbaren Jahren mehr weibliche als männliche Personen im Leben seyn. Vom 20ten bis zum 40ten Jahre ist die Sterblichkeit wieder größer unter den Frauenzimmern, welches durch die Gefahren des Wochenbetts erklärlich ist; man kann annehmen, daß von 500 Wöchnerinnen immer 6 ein Opfer desselben werden.

Vom 40ten bis zum 70ten Jahre sterben hingegen mehr Männer als Weiber, so daß man unter den ältesten Menschen mehr weibliche als männliche zählt; es ist übrigens eine auffallende aber allgemeine Beobachtung, daß die verheiratheten Frauenzimmer ein höheres Alter als die unverheiratheten erreichen können.

Die große Sterblichkeit der Menschen in den ersten Jahren rührt nicht nur von den Gefahren her, welche die Schwachheit der Kinder bedrohen, sondern zum Theil auch von den vielen unehelichen Geburten. In großen Städten ist ungefähr der 10te Theil aller Geburten unehelich, und auf dem Lande der 16te Theil derselben.

Von allen unehelichen Kindern kommt der 20te bis

23te Theil todt zur Welt, und kaum erreicht der 6te Theil derselben das Alter von zwei Monaten.

Florencourt führt die folgenden Erfahrungen über das Verhältniß der Ehen zu den Lebenden an; dasselbe ist nämlich

1 : 108 in Finnland,
1 : 126 in andern schwedischen Provinzen,
1 : 64 in den holländischen Dörfern,
1 : 82 in Amsterdam,
1 : 99 in Harlem,
1 : 100 in Dordtrecht,
1 : 97 in Gouda,
1 : 109 in den kurmärkischen Dörfern,
1 : 98 in kleinen Städten daselbst,
1 : 110 in Berlin,
1 : 119 in den englischen Dörfern,
1 : 115 in den englischen Marktflecken,
1 : 137 in Paris,
1 : 100 in Zürich,
1 : 114 in Königsberg.

Schließt man unter diesen Verhältnissen diejenigen aus, die am meisten abweichen, so erhält man die folgenden mittleren Verhältnisse; nämlich

1 : 103 in kleinen Städten,
1 : 106 in Handelsstädten,
1 : 115 auf dem Lande,
1 : 137 in den größten Städten.

Die Anzahl der Witwer verhält sich zu der Anzahl der Witwen, wie

1000 : 2559 in Pommern,
1000 : 3180 in Dresden,
1000 : 3837 in Wittenberg,
1000 : 3619 in Gotha,
1000 : 3561 in Gera;

woraus sich im Durchschnitt genommen, das Verhältniß 100 : 335 der Witwer zu den Witwen ergiebt, welches seinen hauptsächlichen Grund darin haben mag, daß die Männer in der Regel sich später verheirathen als die Frauenzimmer, und nachdem sie in den Witwenstand getreten sind, eher wieder Gelegenheit zu einem neuen Ehebündnisse finden.

Uiber das Verhältniß der ersten Ehen der Männer zu den zweiten, giebt Florencourt ferner die folgenden Erfahrungen an. Es ist wie

1000 : 260 in Pommern,
1000 : 274 in Harlem,
1000 : 437 in Amsterdam angemerkt worden, und
1000 : 306 nach den genealogischen Tabellen von Lambert.

Im Ländchen Wadt, hat man nach den Mémoires oeconomiques de Berne 1766 bemerkt, daß unter 1000 Ehemännern sich, im Durchschnitt mehrjähriger Beobachtungen, 194 zum zweitenmal in den Ehestand begaben.

Addirt man diese 5 Verhältnisse und dividirt man die Summe durch 5, so erhält man das Durchschnittsverhältniß 1000 : 294 der ersten zu den zweiten Ehen.

Die zweiten Ehen aber sollen sich nach den bekannten Erfahrungen ungefähr wie 1000 zu 140 verhalten.

Bei den Frauen verhalten sich die ersten Ehen zu den folgenden, wie

1000 : 195 in Pommern,
1000 : 265 in Harlem,
1000 : 270 in Amsterdam,
1000 : 86 im Ländchen Wadt;

woraus sich das Durchschnittsverhältniß von 1000 : 204 ergiebt.

Hiernach verhält sich die Anzahl der Witwer die sich wieder verheirathen, zu derjenigen der Witwen, wie 294 : 204 und wenn man sich an denjenigen für Pommern, als den genauesten hält, wie 260 : 195.

Nach Erfahrungen aus den Witwenkassen, soll der sechste Theil der Witwen unter 40 Jahren sich wieder verheirathen.

Die Anzahl der Geburten soll sich im Allgemeinen zu der Anzahl der bestehenden Ehen, jährlich wie 2 : 9 verhalten, so daß also 9 Ehen jährlich nur 2 Kinder zur Welt bringen.

Im Durchschnitt werden 43 Personen auf 10 Familien gerechnet.

Anmerkung.

Die streitbaren Männer werden aus den Altersklassen von 20 bis 60 Jahren genommen. Will man die Gesammtmenge derselben nach der vorgehenden Anleitung durch das Maß der Sterblichkeit berechnen, so muß man die heraus kommende Zahl nach dem Verhältniß 108 : 100 des männlichen Geschlechts zum weiblichen Geschlechte vermindern; doch kann auch die verminderte Zahl noch nicht ganz zur Richtschnur dienen, wenn man nach der Behauptung der politischen Schriftsteller, ohne dem Lande zu schaden nicht mehr als den 100ten Kopf seiner Bevölkerung zum Soldatenstande ziehen kann.

Nach den Bemerkungen Lamberts über die Sterblichkeit im III. Theil der Beiträge, kann man 1 dritte Ehe gegen 6 zweite und 23 erste Ehen rechnen, und annehmen daß von Personen des männlichen Geschlechts

17 einmal,
5 zweimal,
1 dreimal, sich verheirathen.

Die ersten Ehen treffen meistens in die jüngeren Jahre. Für diese hat man gefunden, daß gegen 5 Witwen erster Ehe, 7 Witwer erster Ehe zu rechnen, so daß unter 12 ersten Ehen 7 sind, wo die Frau, und 5, wo der Mann zuerst stirbt. Dieses giebt auf 23 erste Ehen 13 bis 14 Witwer. Von diesen schreiten aber nur 6 zur zweiten Ehe, demnach bleiben 6 bis 7 Witwer, die nach der ersten Ehe sterben.

Die zweiten und folgenden Ehen der Frauen sind überhaupt, wie auch im Vorgehenden schon bemerkt, seltener wie die der Männer. Man kann dabei 8 folgende Ehen auf 30 erste Ehen rechnen.

Unter diesen 8 folgenden Ehen wird höchstens nur eine dritte zu rechnen seyn, da ihre Anzahl bei den Männern schon 6 mal geringer als die Anzahl der dritten Ehen ist. Man hat also auf 30 erste, 8 zweite und 1 dritte Ehen, so daß also unter den Frauenzimmern

22 einmal,
7 zweimal,
1 dreimal, sich verheirathen.

Da nun von 30 ersten Ehen nur 12 bis 13 Witwen übrig bleiben und von diesen nur 8 wieder heirathen, so folgt, daß ihrer 4 oder 5 nach der ersten Ehe als Witwen sterben. Diese Ergebnisse erwarten übrigens ihre Berichtigungen noch von künftigen, zahlreicheren und genaueren Beobachtungen.

Nro. 49. Die relative Wahrscheinlichkeit.

Wenn man nach den besonderen Wahrscheinlichkeiten zweier oder mehrerer Ereignisse, die Vergleichung anstellt, wie sich die eine gegen die andere verhält, so betrachtet man ihre relative Wahrscheinlichkeit.

Nach Nro. 34 ist zum Beispiel.

6/36 die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfel 7 Augen zu werfen, und

3/36 die für 4 Augen.

Spielen nun zwei Spieler auf die Bedingung mit einander, daß dem ersten unter allen möglichen Würfen nur der Wurf 7 und dem andern nur der Wurf 4 als Treffer gelten solle, so fallen nur 9 mögliche Fälle hierbei in Betrachtung, wovon 6 zu Gunsten des ersten und 3 zu Gunsten des andern. Die relative Wahrscheinlichkeit zum Gewinn ist also

6/9 für den ersten,

3/9 für den andern.

Eben dasselbe Resultat erhält man aber auch wenn man die besondere oder absolute Wahrscheinlichkeit eines jeden Falles, durch die Summe der beiden absoluten Wahrscheinlichkeiten dividirt, wie im jetzigen Beispiel:

$$\frac{6/36}{6/36 + 3/36} = \frac{6 + 3}{3} = 6/9 = 2/3.$$

$$\frac{3/36}{6/36 + 3/30} = \frac{3}{6 + 3} = 3/9 = 1/3.$$

und es folgt hieraus ganz allgemein für jede Anzahl möglicher Ereignisse, deren absolute Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, daß man die relative Wahrscheinlichkeit eines jeden dieser Ereignisse erhält, wenn man die absolute Wahrscheinlichkeit desselben durch die Summe aller absoluten Wahrscheinlichkeiten dividirt.

Bei der relativen Wahrscheinlichkeit bleiben alle Fälle die nicht zur Frage gehören, ganz außer Betrachtung, eben so als wenn sie gar nicht Statt finden könn-

ten, indem sie durch die Bedingungen selbst von der Antwort ausgeschlossen werden.

Nro. 50. Die Wahrscheinlichkeit der Zeugen-Aussagen.

Bei jeder Zeugen-Aussage ist einer der vier folgenden Fälle möglich:

1) Der Zeuge weiß die Wahrheit und sagt sie.
2) Er weiß sie nicht, und glaubt sie zu sagen.
3) Er weiß sie, und sagt sie nicht.
4) Er weiß sie nicht und will sie auch nicht sagen.

Hat man für keinen dieser Fälle mehr Grund als für den andern, so ist es eben so als wenn man die Gültigkeit der Aussagen zweier verschiedener Zeugen gegen einander abzuwägen hätte, wovon der eine unfähig etwas anders für Wahrheit auszugeben als was er selbst dafür hält, nur andere täuschen konnte, indem er sich selbst täuscht, der zweite hingegen, bekannt oder unbekannt mit der Wahrheit, sie nicht entdecken möchte.

Widersprechen sich die Aussagen zweier Zeugen über ein mögliches Ereigniß, und verdient keiner mehr Glauben als der andere, so bleibt es ganz zweifelhaft; ist nur die eine glaubwürdig, so widerlegt sie die andere; sind beide gleich verdächtig, so verliert das Ereigniß die Wahrscheinlichkeit; ist aber keine von beiden verdächtig, so kann eine derselben mit der Wahrheit übereinstimmen.

Giebt es Gründe wonach sich die Glaubwürdigkeit der Zeugen abmessen läßt, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit der Thatsache der Rechnung unterwerfen, wie jeder Zufall beim Würfelspiel oder die Erscheinung einer der verschiedenen Kugeln die man aus einer Urne ziehen kann.

I. Gesetzt es sollen zwei Zeugen über eine befrag-

liche Thatsache verhört werden, und man habe die Wahrscheinlichkeit des ersten in 20 Fällen bewährt und in 10 Fällen fehl gefunden, und die des andern sey in 12 Fällen nur 5 mal bewährt gefunden worden, so könnte man nach diesem Maßstab

1) $\frac{20}{20 + 10} = 20/30$ gegen $10/30$ oder 2 gegen 1 auf den ersten und $\frac{5}{5+7} = 5/12$ gegen $7/12$ oder 5 gegen 7 auf den zweiten setzen, daß er die Wahrheit sagen werde.

2) Nach der Lehre der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit könnte man demnächst die Wette eingehen mit
$20/30 \times 5/12 = 100/360$ gegen $260/360$, oder mit 10 gegen 26,
daß beide einstimmig die Wahrheit sagen werden, und mit

3) $10/30 \times 7/12 = 70/360$ gegen $290/360$, oder mit 7 gegen 29, daß beide einstimmig die Unwahrheit sagen werden.

Man könnte ferner:

4) $20/30 \times 7/12 = 140/360$ gegen $220/360$ oder 14 gegen 22 setzen, daß der erstere der Wahrheit zu Gunsten und der andere zuwider sprechen werde, und daß umgekehrt mit

5) $10/30 \times 5/12 = 50/360$ gegen $310/360$ oder mit 5 gegen 31 behaupten.

II. Gesetzt nun daß ihre vernommenen Aussagen mit einander übereinstimmend waren, welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß sie die Wahrheit mitgetheilt, oder das Gegentheil behauptet haben?

Hier kommt es jetzt auf den relativen Werth der

obigen Wahrscheinlichkeiten I., 2 und 3 an, und nach Nro. 49 ist dieser

1) $\frac{100/360}{100/360 + 70/360} = \frac{100}{100 + 70} = 100/170$
$= 10/17$ für die Wahrheit, und

2) $\frac{70/360}{100/360 + 70/360} = \frac{70}{100 + 70} = 70/170$
$= 7/17$ gegen die Wahrheit.

Ist aber die eine Aussage mit der andern im Widerspruch, so hat man den relativen Werth der Wahrscheinlichkeiten I., 4 und 5 zu bestimmen, wonach denn

3) $\frac{140/360}{140/360 + 50/360} = \frac{140}{140 + 50} = 140/190$
$= 14/19$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß der erste die Wahrheit gesagt hat, und

4) $\frac{50/360}{140/360 + 50/360} = \frac{50}{140 + 50} = 50/100$
$= 5/19$ die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite die Wahrheit bekannt gemacht hat.

III. Nimmt man den Fall an, daß die Glaubwürdigkeit des zweiten Zeugen eben so groß als die des ersten, und daß folglich eine jede 20/30 der Gewißheit werth war, so nehmen die zusammen gesetzten Wahrscheinlichkeiten I., 2 und 3 die folgende Gestalt an:

1) $20/30 \times 20/30 = \frac{20^2}{30^2} = 400/800 = 6/9$
für die einstimmige Aussage der Wahrheit.

2) und $\frac{10^2}{30^2} = 100/900 = 1/2$ für die einstimmige Aussage des Gegentheils, und hiernach verwandeln sich die beiden ersten Ausdrücke II. 1, 2 in die folgenden:

3) $\frac{4/9}{4/9 + 1/9} = \frac{4}{4+1} = 4/5$ für die einstimmige Aussage der Wahrheit.

4) $\frac{1/9}{4/9 + 1/9} = \frac{1}{4+1} = 1/5$ für die einstimmige Aussage der Unwahrheit.

Wären es mehr als zwei Zeugen von gleicher Glaubwürdigkeit, so würde man für die befraglichen Wahrscheinlichkeitausdrücke blos den Exponent 2 in den vorgehenden Ausdrücken zu verändern haben, für 3 Zeugen, nämlich den Exponent 3 einführen

wonach der Ausdruck 1 sich in $\frac{20^3}{30^3} = \frac{8000}{27000} = 8/27$

und der Ausdruck 2 sich in $\frac{10^3}{30^3} = \frac{1000}{27000} = 1/27$

verwandeln würde; eben so für 4 Zeugen den Exponent 4 und so weiter.

IV. Um die vorgehenden Formeln unter eine ganz allgemeine oder algebraische Gestalt zu bringen, darf man nur

v für die Zahl der Fälle setzen worin die Wahrhaftigkeit des ersten Zeugen sich bewährte,

m für die Zahl der Fälle worin sie fehlschlug,

und in demselben Sinn v′ und m′ für den zweiten Zeugen setzen, so daß also für das aufgestellte Beispiel

$v = 20 \qquad v' = 5$

$m = 10 \qquad m' = 7$

wäre, so erhält man

A. 1) $\frac{v}{v+m}$ für die Wahrheit der Aussage des ersten Zeugen;

$\frac{m}{v+m}$ für das Gegentheil;

$\frac{v'}{v'+m'}$ für die Wahrheit der Aussage des zweiten Zeugen;

$\frac{m'}{v'+m'}$ für das Gegentheil.

2) $\frac{v}{v+m} \cdot \frac{v'}{v'+m'} = \frac{vv'}{(v+m)(v'+m')}$

für die Wahrheit der möglichen Uibereinstimmung der Aussagen.

3) $\frac{mm'}{(v+m)(v'+m')}$ für das Gegentheil, und im Fall des Widerspruchs

4) $\frac{vm'}{(v+m)(v'+m')}$ für die Wahrscheinlichkeit, daß die Aussage des ersten der Wahrheit günstig seyn werde.

5) $\frac{mv'}{(v+m)(v'+m')}$ für die Wahrscheinlichkeit, daß die Aussage des zweiten die Wahrheit enthalte.

B. Nach den vernommenen Aussagen aber:

1) $\frac{\frac{vv'}{(v+m)(v'+m')}}{\frac{vv'}{(v+m)(v'+m')} + \frac{mm'}{(v+m)(v'+m')}} = \frac{vv'}{vv'+mm'}$

für die Wahrheit der einstimmigen Aussage.

2) $$\frac{\frac{mm'}{(v+m)(v'+m')}}{\frac{vv'}{(v+m)(v'+m')}+\frac{mm'}{(v+m)(v'+m')}}=\frac{mm'}{vv'+mm'}$$

für die Unwahrheit der einſtimmigen Ausſage; und im Fall des Widerſpruchs

3) $$\frac{\frac{vm'}{(v+m)(v'+m')}}{\frac{vm'}{(v+m)(v'+m')}+\frac{mv'}{(v+m)(v'+m')}}=\frac{vm'}{vm'+mv'}$$

für die Wahrheit der Ausſage des erſten Zeugen.

4) $$\frac{\frac{mv'}{(v+m)(v'+m')}}{\frac{vm'}{(v+m)(v'+m')}+\frac{mv'}{(v+m)(v'+m')}}=\frac{mv'}{vm'+mv'}$$

für die Wahrheit der Ausſage des zweiten Zeugen.

C. Setzt man nun wieder den Fall, daß mehrere Zeugen von gleicher Glaubwürdigkeit $\frac{v}{v+m}$ gehört wurden, und nimmt man p für die Anzahl derſelben, ſo erhält man

$\frac{vp}{p+mp}$ für die Wahrheit der einſtimmigen Ausſage;

$\frac{mp}{vp+mp}$ für die Unwahrheit der einſtimmigen Ausſage.

Dividirt man die beiden Glieder des erſten Bruchs durch vp ſo zeigt der Ausdruck

$$\frac{1}{1+\frac{mp}{vp}}$$

daß der Werth dieſer Wahrſcheinlichkeit immer größer wird, je größer die Anzahl p der Zeugen wird, wenn

$v \geqslant m$, das heißt, wenn ihre Wahrhaftigkeit in mehr Fällen bewährt als fehl befunden worden ist, und daß diese Wahrscheinlichkeit hingegen, wenn $m \geqslant v$, um desto geringer ist, je größer die Anzahl p der Zeugen ist.

D. Sind die Aussagen aber nicht einstimmig, und ist

p die Anzahl der Zeugen von der einen Seite,
q die Anzahl derselben von der andern Seite,
die sich einander widersprechen, so ist

$$\frac{v^p \; m^q}{v^p \; m^q + m^p \; v^q}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die Wahrheit auf der ersten, und

$$\frac{m^p \; v^p}{v^p \; m^q + m^p \; v^q}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die Wahrheit auf der andern Seite gesagt werde.

Dividirt man die beiden Glieder dieser Brüche durch $v^q \; m^q$, so erhält man die Ausdrücke:

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}} \quad \text{und} \quad \frac{m^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}}$$

für die Wahrscheinlichkeiten, daß die einstimmigen Aussagen vom p—q Zeugen der Wahrheit entsprechen und nicht entsprechen, so wie man sie auch unmittelbar nach dem vorgehenden Verfahren erhalten würde, und sie bestimmen den Werth der Wahrscheinlichkeit für und wider den befraglichen Thatbestand der übrig bleibt, wenn man die Wahrscheinlichkeit der einstimmigen Aussagen von der einen Seite, gegen die von der andern Seite aufhebt.

Anmerkung.

Auf eben dieselbe Art lassen sich die geschichtlichen Ueberlieferungen, die sich mündlich fortpflanzen, der Wahr-

ſcheinlichkeitsberechnung unterwerfen. Der letzte Erzähler läßt uns nicht nur im Zweifel darüber, ob ſein Vorgänger das auch wirklich geſagt habe, was er ihn ſagen läßt, es kommt auch noch der Zweifel hinzu, ob dieſer die Wahrheit damit geſagt habe.

Nro. 51. Wahrſcheinlichkeitsberechnung des wiederholten Auszugs einer weißen Kugel, aus einer Urne mit weißen und einer andern mit ſchwarzen Kugeln, nachdem man eine Kugel aus der einen in die andere gebracht hat, nach den Ausſagen zweier Augenzeugen.

Von zwei Urnen A und B, enthielte die erſtere 100 weiße Kugeln, die andere 100 ſchwarze. Aus einer von beiden, wurde eine Kugel heraus gezogen und in die andere geworfen, und aus dieſer wieder eine Kugel heraus gethan. Nun behauptet Jemand, er ſey ein Augenzeuge davon, daß die zuerſt gezogene Kugel eine weiße war, von der zweiten wiſſe er aber nichts zu ſagen. Ein anderer ſagt, er habe den Auszug der zweiten Kugel geſehen, die auch eine weiße war, von der erſten wüßte er hingegen nichts zu ſagen.

Welchen Grad der Wahrſcheinlichkeit hat das Zuſammentreffen des Zufalls, daß jedesmal eine weiße Kugel zum Vorſchein kam?

Die Wahrſcheinlichkeitsberechnung eines jeden dieſer Zufälle, als für ſich beſonders und unabhängig von dem andern betrachtet, hat keine Schwierigkeit, ſie wird durch die Abhängigkeit des einen von dem andern nur etwas ſchwieriger.

Die Wahrſcheinlichkeit, daß die erſte Kugel eine weiße ſeyn konnte, iſt nämlich $= 1/2$, weil nur zwei Urnen da

waren, wovon die eine blos weiße, und die andere blos schwarze Kugeln enthielte. Bei dem zweiten Zug würde die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel, auch nur wenig von dem Werth der halben Gewißheit verschieden seyn, wenn der Zieher die Freiheit gehabt hätte, in eine der beiden Urnen nach Gefallen zu greifen; er konnte nur in diejenige greifen, worin die erste Kugel geworfen wurde. War sie nun, wie der erste Augenzeuge sagt, eine weiße Kugel, so wurde sie aus der Urne A in die Urne B gebracht, und da diese alsdann nur 1 weiße mit 100 schwarzen Kugeln enthielte, so ist

1/101 die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus der Urne B hervor kommen konnte.

Diese geringe Wahrscheinlichkeit würde noch um so viel geringer seyn, als die Anzahl der schwarzen Kugeln größer hätte seyn können, und doch könnte die Richtigkeit der beiden Aussagen nur in diesem einzigen Fall zugleich Statt finden.

I. Gesetzt nun daß der Bruch

7/10 den Werth der Glaubwürdigkeit des ersten Zeugen und dessen Ergänzung 3/10 den Werth des Gegentheils ausdrücke,

4/10 den Werth der Glaubwürdigkeit des zweiten Zeugen und die Ergänzung 6/10 den Werth des Gegentheils, so hat man für die Annahme daß die erste Kugel aus der Urne A gekommen wäre, die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

7/10 × 1/2 = 7/20

und 13/20 für das Gegentheil

Summe 1

und da in diesem Fall die zweite Kuge mit der

Wahrscheinlichkeit = 1/101 aus der Urne B gezogen werden könnte, so hat man

4/10 × 1/101 = 4/1010 für die Richtigkeit der zweiten Aussage, und

1006/1010 für das Gegentheil

Summe 1

A. 7/20 × 4/1010 = 28/20200 = 14/10100 folglich für die zusammentreffende Richtigkeit der beiden Aussagen.

Nimmt man aber an, daß die aus der Urne B gezogene Kugel eine schwarze war, wofür die Wahrscheinlichkeit = 100/101 ist, so kommt der Bruch 6/101 als die der Glaubwürdigkeit des zweiten Zeugen entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dabei in Betrachtung, und man hat 6/10 × 100/101 = 600/1010 = 6000/10100 für die Unwahrheit seiner Aussage, folglich

B. 7/20 × 600/1010 = 4200/20200 = 21/10100 für die Annahme, daß die erste Kugel weiß und die zweite schwarz war.

Setzt man den Fall, daß die erste Kugel keine weiße, sondern eine schwarze war, so mußte sie aus B gezogen geworden seyn, und es kommt hierbei der Bruch 3/10 als die der Glaubwürdigkeit des ersten Zeugen entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit in Betrachtung; man erhält also 3/10 × 1/2 = 3/20 für die Unwahrheit seiner Aussage.

Da die zweite Kugel in diesem Fall aus der Urne A genommen wurde, woraus nun mit der Wahrscheinlichkeit 100/101 eine weiße Kugel hervor kommen konnte, so hat man

4/10 × 100/101 = 400/1010 für die Wahrheit der zweiten Aussage, und folglich

C. $3/20 \times 400/1010 = 1200/20200 = 600/10100$ für die Wahrscheinlichkeit daß die erste Kugel eine schwarze und die zweite eine weiße war.

Nimmt man endlich den noch übrigen Fall an, daß sowohl die zweite als die erste Kugel schwarz war, so ist

$6/10 \times 1/101 = 6/1010$ die Wahrscheinlichkeit, daß auch die zweite Aussage falsch war und folglich

D. $3/20 \times 6/1010 = 18/20200 = 9/10100$ die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl zum ersten- als zum zweitenmal eine schwarze Kugel gezogen wurde.

Nun kann aber das Zusammentreffen der Fälle, wonach die beiden Aussagen richtig wären, nur mit den ersten dieser vier Annahmen bestehen, so daß die verlangte Antwort in dem relativen Werth der Wahrscheinlichkeit A gegen die 3 übrigen B, C und D liegt, welcher nach Nro. 49 durch den Bruch

$$\frac{14/10100}{14/10100 + 21/10100 + 600/10100 + 9/10100} = \frac{14}{14 + 2100 + 600 + 9} = \frac{14}{2723}$$

bestimmt wird.

Wäre die Glaubwürdigkeit der beiden Zeugen gleich groß und zum Beispiel $9/10$ der Gewißheitswerth, und die Anzahl der Kugeln in jeder Urne $= 10000$ gewesen, so würde man den höchst unbedeutenden Bruch

$$\frac{81}{18000082}$$

für den Werth der gesuchten Wahrscheinlichkeit erhalten, und es wird derselbe beständig desto geringer ausfallen je größer man die Anzahl der Kugeln in jeder Urne seyn läßt.

II. Setzt man ganz allgemein

n für die Anzahl der Kugeln in jeder Urne,

q für den Werth der Glaubwürdigkeit der ersten Zeugen,

1 — q für das Gegentheil,

q′ für den Werth der Glaubwürdigkeit des zweiten Zeugen,

1 — q′ für das Gegentheil,

so ist $\frac{1}{n+1}$ die Wahrscheinlichkeit für die Erscheinung einer weißen Kugel aus der Urne der schwarzen Kugeln, nachdem eine weiße dazu gethan wurde, oder für eine schwarze Kugel aus der Urne der weißen Kugeln, nachdem eine schwarze dazu gethan wurde und man hat nach der ersten Hypothese

1/2 q für die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Zeuge die Wahrheit sagte,

$\frac{1}{n+1} \cdot q' = \frac{q'}{n+1}$ für die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Zeuge die Wahrheit sagte, folglich

A. $\frac{qq'}{2(n+1)}$ für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beider Fälle, da bei der zweiten Hypothese $\frac{n}{n+1}$ die Wahrscheinlichkeit des Auszugs einer schwarzen Kugel aus der Urne B, und 1—q′ die der Glaubwürdigkeit des zweiten Zeugen entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist, so hat man

$\frac{(1-q')\,n}{n+1}$ für die Unwahrheit seiner Aussage, und

B. $\frac{q\,(1-q')\,n}{2\,(n+1)}$ für die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Kugel weiß und die zweite schwarz war.

Bei der dritten Hypothese ist

1/2 (1 — q) die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Zeuge die Unwahrheit sprach,

$\frac{nq'}{n+1}$ diejenige, daß der zweite Zeuge die Wahrheit sprach, und

C. $\frac{(1-q)\,q'n}{2\,(n+1)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Kugel schwarz und die zweite weiß war.

Bei der vierten Hypothese ist

$\frac{1-q'}{n+1}$ die Wahrscheinlichkeit, daß auch der zweite Zeuge die Unwahrheit sprach, und

D. $\frac{(1-q)\,(1-q')}{2\,(n+1)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogene jedesmal eine schwarze Kugel war, und die Wahrscheinlichkeit A, dividirt durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten A + B + C + D, giebt den Ausdruck

$$\frac{qq'}{qq' + (1-q')\,qn + (1-q)\,q'n + (1-q)\,(1-q')}$$

für die Beantwortung der Frage.

Nro. 52. Uiber die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Berechnung bei Zeugen-Aussagen, so wie bei Wahlen und Beschlüssen durch Stimmenmehrheit.

Man könnte gegen den Nutzen der vorgehenden Berechnungen vielleicht einwenden, daß man nur selten Ge-

legenheit finden werde, die Glaubwürdigkeit eines Menschen so genau zu schätzen, daß der Werth derselben sich durch ein bestimmtes Zahlenverhältniß angeben lasse. Fällt diese Bestimmung weg oder fehlt es derselben an der erforderlichen Genauigkeit, so werden die Resultate der Rechnung freilich auch das Zutrauen der Genauigkeit nicht einflößen, allein die Methode, wonach sie geführt wird, wird immer die zuverläßigste doch seyn, wonach wir unter den Gründen für und wider den Thatbestand des befraglichen Ereignisses, das Wahrscheinlichste herauszubringen im Stande sind. Ist von einer Begebenheit die Rede, die außer dem Kreis unserer Erfahrungen liegt, so ist es nur der sittliche Charakter des Zeugen, der Grad der Glaubwürdigkeit die er verdient, worauf wir die Glaubwürdigkeit der Sache selbst ankommen lassen. Fehlt es aber an allen Gründen zur Berechnung des Wahrscheinlichen, so müssen wir uns auch alles Urtheils darüber enthalten.

Wie viel fortgepflanzte Irrthümer über die Erscheinungen in der Natur, fesseln nicht die Augen des unerfahrnen Menschen, so daß er zuweilen die unglaublichsten Dinge wirklich zu sehen glaubt? Das Beispiel der Zeugen-Aussagen Nro. 50 führte zu dem merkwürdigen Resultat, daß der Werth des Irrthums in dem einstimmigen Vorgeben solcher Zeugen, die öfter fehl als wahr gefunden werden, immer größer wird, je größer die Anzahl derselben wird, und in der That, je größer die Menge der befangenen Zuschauer eines ungewöhnlichen Ereignisses ist, desto größer würde das Wunder seyn, daß sie sämmtlich mit hellen Augen sehen und der Täuschung widerstehen sollten.

Die Methode, wonach man die Gültigkeit oder den Werth der Entscheidungen bei Wahlen und Beschlüssen

durch Stimmenmehrheit zu berechnen gesucht hat, beruhen auf Vorkenntnissen, die zur Verständniß dieser Sammlung bis hierher nicht vorausgesetzt worden sind. Das folgende Beispiel wird einen kurzen Begriff davon geben, welchen Gebrauch man von den Combinationen machen könnte, um den verdienstlichsten unter mehreren Wahlkandidaten hervorzuheben.

Sind es zum Beispiel drei Wahlkandidaten A, B, C worüber die Stimmenden gesammelt werden sollen, so müssen die Stimmenden sich über die Ordnung des Vorzugs erklären, den jeder der drei Kandidaten, ihrem Urtheil nach, vor dem andern verdient, welches auf den Stimmzetteln auf die folgende kurze Art bemerkt werden könnte.

A vor B,
B vor C, wonach denn auch
A vor C.

Dies kann bekanntlich nach sechserlei Ordnungen geschehen, indem drei Gegenstände sich auf sechserlei Arten zu 2 und 2 mit einander combiniren lassen. Aus der Mehrheit der gleichen Verbindungen, wird alsdann der Rang bestimmt, der jedem der drei Kandidaten zuerkannt worden ist.

Ergeben sich zum Beispiel aus 60 Stimmzetteln die folgenden Rangordnungen

23 mal ACB,
19 • BCA,
16 • CBA,
2 • CAB,

60

so sieht man daß

A vor B, 23 + 2 = 25 mal den Vorzug erhalten hat.
B vor A, 19 + 16 = 35 mal

A vor C, 23 mal
C vor A, 19 + 16 + 2 = 37 mal

B vor C, 19 mal
C vor B, 23 + 16 + 2 = 41 mal

und hiernach stehen die 3 Verbindungen, welche in der Mehrheit vorkommen, in folgender Ordnung

41 mal C vor B,
37 mal C vor A,
35 mal B vor A,

wodurch also die Verdienstordnung CBA als diejenige bestimmt wird, wofür sich die Mehrheit der Urtheile erklärt hat, an deren Spitze nun C oder derjenige Kandidat steht, welcher nur 18 Stimmen erhalten haben würde, wenn auf jedem Stimmzettel nur ein einziger Namen gestanden hätte, und der folglich, da A 23, und B 19 Stimmen hätte, nicht zu der zweiten Wahl gekommen wäre, die man, wie es gebräuchlich ist, mit den beiden Kandidaten, welche die meisten Stimmen haben, noch einmal vornimmt.

Diese wiederholte Wahl giebt oft desto mehr Gelegenheit zum Mißbrauch der Stimmen, je größer die Anzahl der Stimmenden ist, indem es einer kleinen Anzahl von Wählern, welche sich darüber mit einander verstehen, desto leichter gemacht wird, die Majorität, deren Stimmen sich über mehrere Kandidaten vertheilen, zur Wahl unter zwei Kandidaten zu zwingen, die sie anders verwerfen würden.

Bei dem vorgeschlagenen Verfahren, kann aber auch die folgende Schwierigkeit eintreten. Gesetzt es hätten sich

aus den 60 Stimmzetteln die folgenden Rangordnungen ergeben, nämlich

12 mal ABC
9 » ACB
20 » BCA
10 » CAB
9 » CBA

wonach die Vorzugs-Verbindungen in den folgenden Mengen erscheinen

A vor B, 31 mal
A » C, 21 »
B vor A, 29 mal
B » C, 32 »
C vor A, 39 mal
C » B, 28 »

und diejenigen darunter, welche die meisten Stimmen haben, in folgender Ordnung stehen:

1) C vor A, 39 mal
2) B » C, 32 »
3) A » B, 31 »

Nach den beiden ersten wäre nun, weil B vor C und C vor A den Vorzug hat, auch B vor A zu setzen, welches der dritten Verbindung widerspricht, worin A vor B den Vorzug hat. Um diese Schwierigkeit zu heben, könnte man aber je zwei und zwei Vorzugs-Verbindungen wieder mit einander combiniren, hieraus dann neue Rangordnungen bilden und diejenige als entscheidend betrachten, welche in der Mehrheit vorkäme. Auf diese Art erhielte man mit den obigen Verbindungen die folgenden gepaarten Verbindungen

71 mal C vor A mit B vor C und hieraus die Ordnung BCA
70 » C » A mit A » B » » » » CAB
63 » B » C mit A » B » » » » ABC

und folglich BCA, wegen der Mehrheit, als die entscheidende Vorzugsordnung. Wollte man dieses Verfahren aber nicht einschlagen, so bliebe das Mittel einer zweiten Wahl unter den beiden Kandidaten A und B durch Stimmenmehrheit noch übrig.

Nro. 53. Allgemeiner Grund der Wahrscheinlichkeitsberechnungen.

Alle Wahrscheinlichkeitsberechnungen gründen sich hauptsächlich, auf die Vergleichung der verschiedenen Zufalls-Verbindungen, woraus das befragliche Ereigniß entweder schon hervorgegangen ist, oder noch hervorgehen könnte. Lassen diese Combinationen sich abzählen, wie die der möglichen Zufälle im Würfelspiel, und bei den Glücksrädern oder Urnen, so ist das Ereigniß auch offenbar ein Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsberechnung.

1) Nehmen wir an, daß durch die Wirkung mehrerer Ursachen die Erscheinung A sich, der Erfahrung gemäß, mehreremal, zum Beispiel m mal, unter m + n Erscheinungen, auf der einen Seite einfinden könne, und daß durch eine andere Vereinigung von Umständen, anderer Seits die Erscheinung B, p mal unter p + q Erscheinungen Statt finden könnte, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Zusammentreffens der beiden Erscheinungen A und B ebenso berechnen, wie die des Zusammentreffens der Seite A und B in dem Wurf zweier Würfel, wovon der eine m mit A bezeichnete Seiten, und n unbezeichnete Seiten, und wovon der andere p mit B bezeichnete und q unbezeichnete Seiten hat.

Da jede der m + n Seiten des einen Würfels mit jeder der p + q Seiten des anderen erscheinen kann,

so sind in allem folglich $(m + n)(p + q) = mp + np + mq + nq$ Erscheinungen möglich.

Der Theil mp dieses Products zeigt an, wie vielmal A mit B zum Vorschein kommen könne, indem jede der m Erscheinungen von A, mit jeder der p Erscheinungen von B zusammen treffen kann, und man hat hiernach den allgemeinen Ausdruck

$$\frac{mp}{mp + np + mq + nq} = \frac{mp}{(m+n)(p+q)}$$

für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Erscheinungen.

Der Theil mq des Products zeigt an, wie vielmal die Erscheinung A mit einer andern Seite des zweiten Würfels zusammentreffen könne.

Der Theil nq wie vielmal jede unbezeichnete Seite eines Würfels, mit einer unbezeichneten des andern Würfels.

Der Theil np wie vielmal die Erscheinung einer Seite B des zweiten Würfels, mit einer unbezeichneten des ersten Würfels zusammentreffen könne.

2) Setzt man voraus, daß die Vereinigung mehrerer Umstände in

m + n Fällen
m mal die Erscheinung A
n mal die Erscheinung B

hervorbringen werde, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit der unmittelbaren Folge der Erscheinungen

A nach A
B nach A
A nach B
B nach B

ebenso berechnen, wie das Zusammenfallen der Seiten

zweier Würfel, wovon ein jeder m mit A bezeichnete Seiten, und n mit B bezeichnete Seiten hat.

Da nun eine jede der m + n Seiten des einen Würfels, mit den m + n Seiten des andern, zusammenfallen kann, so sind in allem (m + n) (m + n) = $m^2 + mn + nm + n^2$ Erscheinungen möglich.

m^2 zeigt an, wie vielmal die Verbindung oder Folge AA darunter Statt finden kann.

n^2 zeigt die Menge der möglichen Erscheinungen BB an.

mn die Menge der Erscheinungen AB.

nm die Menge der Erscheinungen BA, und

2mn die Menge der Erscheinungen AB und BA wenn man hierbei nicht auf die Ordnung in der Folge der einen A vor der andern B sieht, und hiernach ist

$\frac{m^2}{(m+n)\,(m+n)} = \frac{m^2}{(m+n)^2}$ die Wahrscheinlichkeit für AA,

$\frac{2mn}{(m+n)^2}$ die Wahrscheinlichkeit für AB, wenn man keinen Unterschied zwischen AB und BA macht,

$\frac{n^2}{(m+n)^2}$ die Wahrscheinlichkeit für BB.

Ebenso wie diese Ausdrücke für die befraglichen Wahrscheinlichkeiten in zwei Versuchen, oder im Würfelspiel mit zwei Würfeln in zwei Würfen entstehen, so erfolgen sie auch für jede größere Anzahl von Versuchen.

3) So giebt der Ausdruck

$(m + n)^3 = m^3 + 2m^2n + 2mn^2 + n^3$

die Menge aller möglichen Erscheinungen bei drei Versuchen an, ebenso wie zum Beispiel die Erscheinungen der Seiten A und B eines dreimal nach einander geworfenen Würfels, welcher m mit A bezeichnete und n mit B bezeichnete Seiten hat. Hier zeigt nun der Term

m^3 die darunter begriffene Menge der Verbindungen oder Folgen AAA an,

$2m^2n$ die Menge der Verbindungen AAB, oder BAA ohne Rücksicht auf die Ordnung in der Stellung von B bei AA,

$2mn^2$ die Menge der Verbindungen ABB ohne Rücksicht auf die Stellung von A bei BB

n^3 die Menge der Verbindungen BBB,

$\frac{m^3}{(m+n)^3}$ ist die Wahrscheinlichkeit für den Erfolg der Erscheinung AAA,

$\frac{n^3}{(m+n)^3}$ für den Erfolg von BBB,

$\frac{2m^2n}{(m+n)^3}$ für den Erfolg von AAB oder BAA, ohne Rücksicht auf die Stellung von B vor oder nach AA,

$\frac{m^2n}{(m+n)^3}$ hingegen für den Erfolg der bestimmten Stellung AAB und ebenso

$\frac{m^2n}{(m+n)^3}$ für den bestimmten Erfolg von BAA,

$\frac{2mn^2}{(m+n)^3}$ für den Erfolg von ABB oder BBA,

$\frac{mn^2}{(m+n)^3}$ für den bestimmten Erfolg einer der beiden vorigen Verbindungen.

4) Hiernach findet man ganz allgemein, für die Anzahl p von Versuchen, die mögliche Menge aller Erscheinungen zusammengenommen und einzeln betrachtet, mit ihren Wahrscheinlichkeiten, in der Entwickelung des Binoms

$$(m+n)^p = m^p + \frac{p}{1} \cdot m^{p-1} n + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} m^{p-2} n^2 \ldots$$

$$\ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots q} m^{p-q} n^q \ldots + n^q$$

worin der allgemeine Term

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots q} m^{p-q} n^q$$

anzeigt, wie vielmal unter den übrigen Verbindungen, diejenige möglich ist, wobei A, $p - q$ mal und B, q mal auf einander folgt, ohne Rücksicht auf die Stellung der Folge in A vor oder nach der Folge in B.

Um aber die Menge zu haben, worin jede besonders bestimmte Stellung dieser Combinationen vorkommt, darf man nur den Coefficient unterdrücken und den Ausdruck $m^{p-q} n^q$ gebrauchen, wie es bei der vorgehenden Entwickelung nach dem dritten Grade gezeigt worden ist.

5) Setzt man der Kürze halber, für einen einfachen Wurf des bedungenen Würfels, die für A statt findende Wahrscheinlichkeit $\frac{m}{m+n} = e$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die für B nämlich $\frac{n}{m+n} = 1 - e = f$, so nimmt die vorgehende Binomialentwickelung, wenn sie mit $(m+n)^p$ dividirt wird, oder so nimmt der Ausdruck

$$\frac{m^p}{(m+n)^p} + \frac{p}{1} \cdot \frac{m^{p-1} n}{(m+n)^p} + \frac{p.(p-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{mn^2}{(m+n)^p} + \text{&c.}$$

die folgende Gestalt an,

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f + \frac{(p-1)}{1.2} e^{p-2} f^2 \ldots\ldots + \frac{p.(p-1)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots\ldots q} e^{p-q} f^q \ldots\ldots + f^p$$

worin nun jeder Term für sich besonders genommen, die Wahrscheinlichkeit der Verbindung anzeigt, worin A so viel mal wiederholt ist, als der Exponent von e die Einheit enthält, und B so vielmal wiederholt vorkommt, als der Exponent von f die Einheit enthält.

Die Summe der beiden ersten Termen drückt den Werth der Wahrscheinlichkeit aus, daß A wenigstens p—1 mal wo nicht p mal, in p Würfen oder Versuchen nach einander zum Vorschein kommen werde.

Die Summe der drei ersten Termen giebt den Werth der Wahrscheinlichkeit, daß A wenigstens p — 2 mal nacheinander und B damit wenigstens 2 mal nach einander erscheinen werde.

Die Summe der Termen, vom ersten bis zu demjenigen der mit $e^{p-q} f^q$ im Product steht, oder die Summe

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f \ldots\ldots + \frac{p.(p-1)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots\ldots q} e^{p-q} f^q$$

drückt im allgemeinen den Werth der Wahrscheinlichkeit aus, daß A wenigstens p — q mal, und B q mal nach einander, aus p Versuchen hervorgehen könne.

6) Zur Anwendung dieser Formeln, sey nun zum Beispiel die Frage zu beantworten, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, daß man mit einem gewöhnlichen Würfel, eine bestimmte der 6 Nummern von 1 bis 6, wenigstens 2 mal in 4 Würfen treffen werde: da die Wahrscheinlichkeit,

daß man die bestimmte Nummer mit einem Wurf treffen werde $= \frac{1}{1+5} = \frac{m}{m+n}$ ist, so ist hier

$$e = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

$$\text{und } f = 1 - e = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$p = 4$$

zu nehmen, weil hier 4 Würfe oder Versuche angenommen werden; und man hat die 3 ersten Termen der Entwickelung des Binoms $(e + f)^4$ zur Beantwortung der Frage zu summiren; diese sind

$$e^4 + 4e^3 f + 6e^2 f^2 = \frac{1}{6^4} + 4 \cdot \frac{1 \times 5}{6^4} + 6 \cdot \frac{1 \times 5^2}{6^4} =$$

$$= \frac{1}{1296} + \frac{20}{1296} + \frac{150}{1296} = \frac{171}{1294}$$

$$= \frac{1}{7\frac{99}{171}}$$

so daß der gesuchte Werth der Wahrscheinlichkeit folglich zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$ fällt.

7) Fragte man nach der Wahrscheinlichkeit die bestimmte Nummer wenigstens einmal in 4 Würfen zu treffen, so müßte man die 4 ersten Termen summiren, diese sind

$$e^4 + \frac{4}{1} \cdot e^3 f + \frac{4 \cdot (4-1)}{1 \cdot 2} e^2 f^2 + \frac{4 \cdot (4-1)(4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e f^3 =$$

$$e^4 + 4e^3 f + 6e^2 f^2 + 4e f^3 = \frac{1 + 20 + 150 + 500}{1296}$$

$$= \frac{671}{1296} = \frac{1}{1\frac{625}{671}}$$

oder etwas größer als $\frac{1}{2}$; allein für diesen Fall kann man einen kürzeren Weg einschlagen, denn da $e + f = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$, so ist auch $(e + f)^4 = 1$ oder $e^4 + 4e^3 f + 6e^2 f^2 + 4e f^3 + f^4 = 1$, folglich die Summe der vier ersten Termen $= 1 - f^4 =$

$$1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

Man multiplicirt nämlich die Ergänzungen $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$, der Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, in einander, und subtrahirt das Product von 1.

Da der gefundene Werth der Wahrscheinlichkeit nun den Bruch $\frac{1}{2}$ übertrifft, so ist die Wahrscheinlichkeit des Gewinns hier größer als die des Verlustes, und der Erfolg also wahrscheinlich, nach der Definition des Wahrscheinlichen.

8) Ein Spieler A will gegen einen andern B wetten, daß er in 3 Würfen mit einem Würfel, wenigstens einmal ein Aß treffen werde, wie viel kann er nach der Bestimmung der rechtmäßigen Wette darauf setzen?

Nach dem Vorgehenden hat

A die Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{5^3}{6^3} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

B die Wahrscheinlichkeit . . . . . $= \frac{125}{216}$

für sich, deren Summe . $= 1$

demnach kann A nur 91 gegen 125 setzen.

Man könnte sich hierbei zu dem Irrthum verleiten lassen, daß die Wette gegen gleiche Einlagen die rechtmäßige wäre, weil nur 6 verschiedene Zufälle möglich seyen; mit dieser Annahme würde man aber irrigerweise voraussetzen, daß in 6 Würfen beständig alle Nummern von 1 bis 6 geworfen würden.

9) Wollte man die Termen der Entwickelung der Binomien über zur Beantwortung der umgekehrten Frage anwenden, mit wie viel Würfen man nach einer gegebenen Wahrscheinlichkeit, auf die Ankunft eines verlangten Wurfes rechnen könne, so wäre der Exponent p unbestimmt, und

man könnte nur nach dem Verſuch mehrerer Subſtitutionen für p in der Entwickelung

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f \ldots\ldots\ldots + \frac{p}{1} e f^{p-1}$$

den Werth deſſelben erhalten.

10) Da man für jede Verbindung in den Folgen der Ereigniſſe A und B einen Term in der Entwickelung des Binoms m + n nach der Potenz p die der Anzahl der Verſuche gleich iſt, findet, welcher angiebt, wie viel mal dieſe Verbindung unter den übrigen Statt finden kann, ſo kann man die Wahrſcheinlichkeit einer jeden mit der jeder andern vergleichen, und folglich diejenige Verbindung, welche die größte Wahrſcheinlichkeit für ſich hat, auch beſtimmen.

Nimmt man zur Vereinfachung der Betrachtung zuerſt an, daß B eben ſo leicht als A zum Vorſchein kommen könne, daß alſo m = n ſey, ſo folgt

1) daß der mittlere Term der größte iſt, wenn die Anzahl der Termen ungrad, oder der Exponent der Potenz eine grade Zahl iſt;

2) daß die beiden mittleren Termen einander gleich und größer als alle übrigen ſind, wenn die Anzahl der Termen grad, oder der Exponent der Potenz eine ungrade Zahl iſt, wie die folgenden Darſtellungen zeigen.

I. $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$.

II. $(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$.

III. $(m + n)^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$.

IV. $(m + n)^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$.

I. Der mittlere Term 2mn verwandelt ſich in $2m^2$

dach m gesetzt wird, und ist folglich offenbar der größte Term des Binoms von der zweiten Potenz.

II. Die beiden Termen $3m^2n$ und $3mn^2$ verwandeln sich in $3m^3$, und sind also beyde so groß als jeder der beiden andern Termen.

III. Der mittlere Term $6m^2n^2$ verwandelt sich in $6m^4$, der wieder größer wie jeder andere ist.

IV. Die beiden mittleren Termen verwandeln sich in $10m^5$, die ebenfalls größer sind als die übrigen.

In dem angenommenen Fall der gleichen Möglichkeit der Erscheinungen von A und B sind hiernach die folgenden Ergebnisse die wahrscheinlichsten:

1) einmal A und einmal B in 2 Versuchen;

2) zweimal A und zweimal B in 4 Versuchen, und wenn die Anzahl der Versuche ungerade ist

3) 2 mal A und 1 mal B } in 3 Versuchen:
2 mal B und 1 mal A }

4) 3 mal A und 2 mal B } in 5 Versuchen, u. s. w.
3 mal B und 2 mal A }

und die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse sind

$\frac{2m^2}{(m+m)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ für 1 mal A und 1 mal B.

$\frac{6m^4}{(m+m)^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ für 2 mal A und 2 mal B.

$\frac{3m^3}{(m+m)^3} = \frac{3}{8}$ für 2 mal A und 1 mal B, oder 2 mal B und 1 mal A.

$\frac{10m^5}{(m+m)^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$ für 3 mal A und 2 mal B oder 3 mal B und 2 mal A.

Aus einem ganz einfachen Grunde wird der Werth dieser Wahrscheinlichkeiten immer kleiner, je größer die Anzahl der Versuche wird, denn da die Menge der möglichen

Verbindungen dadurch immer größer wird, so wird das Verhältniß der Verbindungen einer einzigen Art immer kleiner dagegen.

Das entgegengesetzte findet hierbei für die relativen Wahrscheinlichkeiten Statt. So wird zum Beispiel die relative Wahrscheinlichkeit, daß man eher 1 mal A mit 1 mal B, als 2 mal A bekommen werde, durch den Bruch

$$\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$$

ausgedrückt, weil nach dem Vorgehenden

$\frac{1}{2}$, die absolute Wahrscheinlichkeit ist für 1 mal A und 1 mal B,

$\frac{1}{4}$ dieselbe für 2 mal A.

Dagegen wird die relative Wahrscheinlichkeit, daß man eher 2 mal A und 2 mal B, als 4 mal A nach einander bekommen werde, wofür $\frac{3}{8}$ und $\frac{1}{16}$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten sind, durch den Bruch

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{16}+\frac{3}{8}}=\frac{3}{\frac{1}{2}+3}=\frac{3}{\frac{7}{2}}$$

ausgedrückt, welcher größer als $\frac{1}{2}$ ist, und durch die Fortsetzung dieser Rechnung, wird man, wie hieraus ersichtlich, auf immer größere Werthe kommen, so wie die gesunde Vernunft es auch schon begreiflich macht, daß ein stärkerer Zufall dazu gehöre, eine ununterbrochene Folge der Erscheinungen A, als irgend eine Abwechselung der Erscheinungen A und B hervor zu bringen, wenn beide gleich möglich sind.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man in 100 Versuchen 50 mal nach einander A und 50 mal nach einander B bekommen werde, ist nur 0,0796 (sehr nahe) werth; allein die relative Wahrscheinlichkeit daß dieses Ereigniß eher, als die 100 malige Folge von A eintreffen werde, wird ausgedrückt durch den Bruch

$\frac{0{,}0796}{\frac{1}{2^{100}} + 0{,}0796}$, oder beinahe durch den Werth von

$\frac{1}{1 \quad 2^{100} \times 0{,}0796 + 1}$ welcher von der Einheit nur äußerst wenig verschieden ist, indem der entwickelte Nenner des abzüglichen Bruchs, mit 37 Ziffern geschrieben werden müßte, so daß man folglich, so gut als mit völliger Gewißheit darauf rechnen kann, daß das erstere eher als das letztere eintreffen könnte.

11) Ist die Wahrscheinlichkeit der Erscheinung A aber größer oder kleiner als die Wahrscheinlichkeit der Erscheinung B, und folglich m größer oder kleiner als n, so ist dasjenige Ereigniß das wahrscheinlichste, worin die Anzahl der Wiederholungen von A zu der Anzahl der Wiederholungen von B, in dem Verhältniß von m : n steht.

Da diese Behauptung aber im Allgemeinen einen viel weitläuftigern Beweisgang als die vorige erfordert, so werden die folgenden Beispiele hier statt desselben dienen, ihre Richtigkeit ins Licht zu setzen.

Nimmt man an, daß der Würfel womit die Versuche gemacht werden sollen, 3 mit A, und 2 mit B bezeichnete Seiten habe, so ist $m = 3$ und $n = 2$, und für 5 Versuche $p = 5$.

Man hat alsdann das Binom $(m + n)^5$ zu entwickeln und der ansehnlichste Term desselben, nämlich

$10m^3n^2 = 10 \cdot 3^3 \cdot 2^2 = 1080$ giebt die Wahrscheinlichkeit,

$\frac{1080}{5^5} = \frac{1080}{3125} = \frac{1}{3}$ sehr nahe,

daß man in 5 Versuchen, 3 mal nach einander A und 2 mal nach einander B bekommen werde.

Für 10 Versuche wäre $p = 10$ und

$$\frac{10.9.8.7}{1.\ 2.\ 3.\ 4} m^6 n^4 = 210\, m^6 n^4 = 210 . 3 . 2 = 2449440$$

der ansehnlichste Term des Binoms $(m + n)^{10}$, folglich

$$\frac{2449440}{5^{10}} = \frac{2449440}{9765625} = \frac{2}{3} \text{ sehr nahe}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß man in 10 Versuchen, 6 mal nach einander A, und 4 mal nach einander B bekommen werde. In den beiden Fällen verhalten sich also die Folge von A zu der Folge von B wie 3 : 2.

Da der Werth der letzteren Wahrscheinlichkeit geringer als der vorige ist, so bestättigt auch diese Vergleichung die Bemerkung in 10 wieder, daß der Werth der Wahrscheinlichkeit des Zufalls welcher am gewöhnlichsten vorkommt desto geringer wird, je größer die Anzahl der Versuche wird.

Da nur diejenigen Zahlen sich nach dem Verhältniß von 3 : 2 theilen lassen, welche ein Vielfaches der Zahl 5 sind, so wird man in der Entwickelung des Binoms, wenn der Exponent der Potenz kein Vielfaches von 5 ist auch keinen Term finden, worin die Exponenten von m und n in dem Verhältniß 3 : 2 stehen, und in diesem Fall sind diejenigen Termen immer die ansehnlichsten worin die Exponenten von m und n diesem Verhältniß am nächsten kommen.

12) Zum Beschluß dieser Betrachtungen sey nun noch die folgende Anwendung davon zu machen. Es sey nämlich

p eine Anzahl zu versichernder Schiffe von gleichem Werth a,

b die Versicherungs-Prämie für jedes Schiff,

e die Wahrscheinlichkeit der glücklichen Ankunft jedes Schiffes,

f die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils,

c die stärkste Summe, deren Verlust der Versicherer wagen will,

und die Frage zu beantworten, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, daß er nicht mehr als diese Summe verlieren könne?

Setzt man die unbekannte Größe

q für die Anzahl der unglücklichen Schiffe, wobei nach Abzug der empfangenen Prämien, der Verlust c heraus kommt, so soll also

$qa - pb = c$ seyn, hiernach findet man

$q = \frac{c + pb}{a}$, welcher Werth durch die Zahl q' ausgedrückt werde,

und man hat nun das Binom $(e+f)^p$ bis zu demjenigen Term einschließlich zu entwickeln, worin $e^{p-q'}$ vorkommt, da die Summe dieser Termen die Wahrscheinlichkeit angiebt, daß die Wiederholung des unglücklichen Falles, wofür f die Wahrscheinlichkeit ist, nicht mehr als q' mal eintreffen werde; denn in diesem Fall kommt die Wiederholung des glücklichen Ereignisses, wofür e die Wahrscheinlichkeit ist, wenigstens $p-q$ mal vor und da zusammengenommen nicht mehr als p Wiederholungen der beiden Ereignisse Statt finden können, so können nach der Wahrscheinlichkeit, welche durch jene Summe ausgedrückt wird, auch nicht mehr als q' Wiederholungen des unglücklichen Ereignisses Statt finden.

Gesetzt nun weiter, daß dem Versicherer eine Summe g zum Gewinn übrig bleiben solle, so müßte die dabei eintreffende Anzahl q'' der unglücklichen Ereignisse, kleiner als q', und die Differenz

$g = pb - q''a$ seyn. Substituirt man den Werth für pb aus der vorigen Gleichung $qa - pb = c$,

nämlich den Werth $pb = c - q'a$ in die gegenwärtige Gleichung, so kommt

$$g = q'a - q''a - c \text{ woraus } q' - q'' = \frac{c + g}{a}$$

oder

$$q'' = q' - \frac{c + g}{a}.$$

Ist also q' bekannt, so läßt sich q'' darnach und zwar unabhängig von p bestimmen, und die Wahrscheinlichkeit dieses Falls durch die Summation der Termen der Binomialentwickelung, vom ersten Term bis zu demjenigen, worin $e^{p-q''} f^{q''}$ vorkommt.

Nach der Vergleichung der beiden untersuchten Wahrscheinlichkeiten, wird es sich dann zeigen, ob die für den beabsichtigten Gewinn g stark genug, gegen die des angenommenen Verlustes c ist, daß man die Gefahr des letztern vernünftigerweise wagen dürfte.

Je größer übrigens die Anzahl p der Schiffe genommen wird, desto kleiner wird das Verhältniß $\frac{q' - q''}{p}$, desto kleiner folglich auch die Anzahl der Termen der Binomialentwickelung zwischen denjenigen seyn, die mit $e^{p-q''} f^{q''}$ und $e^{p-q'} f^{q'}$ verbunden sind, und desto mehr wird sich der Werth der Wahrscheinlichkeit des Gewinns, dem Werth der Wahrscheinlichkeit des Verlustes nähern.

Bemerkung.

Es ist nicht leicht einzusehen, wie man zu genau bestimmten Werthen, für die Wahrscheinlichkeiten der Zufälle gelangt seyn könnte, welche die Schifffahrt betreffen.

Hierzu werden nicht nur Erfahrungen über eine große Anzahl vollbrachter und verunglückter Seefahrten vor-

ausgesetzt, sondern auch sehr ausführliche Bemerkungen über die Beschaffenheit des Baus und der Bemannung der Schiffe, über die Jahrszeiten worin sie dem gefährlichen Element anvertraut wurden, über die Hafen worin sie ein- und ausliefen, über die Waaren womit sie beladen waren und über die Amorien die sie zu verantworten hatten. Es ist allerdings zu vermuthen, daß die Bedeutenderen unter den Assecuranz-Gesellschaften im Besitz solcher Erfahrungen seyn werden, die ihnen größten Theils zur Richtschnur dienen mögen, wozu die große Ausdehnung und Vervollkommnung der Schifffahrt in den neueren Zeiten behülflich seyn konnte, allein es ist sehr wahrscheinlich, daß der große Gewinn welchen die Seehandlung in vorigen Zeiten abgeworfen, die vorsichtigern unter den Handeltreibenden bewogen habe, große Versicherungs-Prämien anzubieten, um mit Sicherheit zu Werk zu gehen, wodurch sie Versicherer fanden, deren Gewinn nach und nach eine größere Concurrenz, und ein billigeres Verhältniß zwischen denjenigen die versicherten und versichern ließen, einführte, so daß dieser Handel immer allgemeiner wurde, dessen natürliches Streben dahin geht, ein gewisses Gleichgewicht in den wechselseitigen Vortheilen der Contrahenten zu begründen, indem es die Aufgabe der Versicherer ist, den Schaden den sie möglicherweise zu tragen haben, mit dem Gewinn zu decken, den sie von den Glücklicheren auf der andern Seite zu erwarten haben.

Nro. 54. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man in 6 Würfen mit einem gewöhnlichen Würfel, alle 6 Nummern erhalten werde?

Antwort: 5/324 oder etwas größer als 1/65; denn mit dem 1ten Wurf hat man die Gewißheit eine der 6 Nummern zu machen, mit dem

2ten Wurf hat man also die Wahrscheinlichkeit 5/6, eine der 5 übrigen Nummern zu machen.

Träfe dieses ein, so wäre 4/6 die Wahrscheinlichkeit im 3ten Wurf für jede der 4 übrigen Nummern. Die Wahrscheinlichkeit des wirklichen Erfolgs wird also durch das Product

$5/6 \times 4/5 = 10/18$ ausgedrückt.

Nach dem Eintreffen desselben, wäre 3/6 die Wahrscheinlichkeit im

4ten Wurf für jede der 3 übrigen Nummern. Die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs ist also das Product.

$5/6 \times 4/6 \times 3/6 = 10/18 \times 1/2 = 5/18.$

So fortgehend findet man die Wahrscheinlichkeit, mit dem 5ten Wurf eine der 2 übrigen Nummern zu machen, in dem Product

$5/6 \times 4/6 \times 3/6 \times 2/6 = 5/18 \times 1/3 = 5/54$

und für die Wahrscheinlichkeit der letzten Nummer im 6ten Wurf, das Product

$$5/6 \times 4/6 \times 3/6 \times 2/6 \times 1/6 = 5/54 \times 1/6 = \frac{5}{324}$$

etwas weniges größer als 1/65, so daß man also in 65 Versuchen, nur einmal die Ankunft aller Nummern durch 6 Würfe mit Wahrscheinlichkeit erwarten könnte.

Tafel A.

a	b	c	d
aa	bb	cc	dd
ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Tafel B.

a	b	c	d
aaa	baa	caa	daa
aab	bab	cab	dab
aac	bac	cac	dac
aad	bad	cad	dad
abb	bbb	cbb	dbb
aba	bba	cba	dba
abc	bbc	cbc	dbc
abd	bbd	cbd	dbd
acc	bcc	ccc	dcc
aca	bca	cca	dca
acb	bcb	ccb	dcb
acd	bcd	ccd	dcd
add	bdd	cdd	ddd
ada	bda	cda	dda
adb	bdb	cdb	dbd
adc	bdc	cdc	ddc

Nro 55. Die Permutationen mit Wiederholungen.

1) Setzt man von vier Dingen jedes einmal zu sich selbst und zu den übrigen, so entstehen 4 mal 4, oder $4^2 = 16$ Verbindungen derselben zu zwei und zwei, wie zum Beispiel diejenige der vier Buchstaben a, b, c, d in der vorstehenden Tafel A, worunter jeder Buchstab einmal mit sich selbst gepaart vorkommt.

Für fünf Dinge ist hiernach die Anzahl dieser Verbindungen $= 5^2 = 25$ und überhaupt für m Dinge $= m^2$.

2) Setzt man zu den vorigen Verbindungen noch einmal jedes Ding, oder jeden Buchstaben, so wird die Anzahl der neuen Verbindungen noch 4 mal, 5 mal, m mal so groß, wenn es 4, 5 oder überhaupt m Buchstaben sind.

Für 4 Buchstaben erhält man, wie die vorstehende Tafel B zeigt, $4 \times 4 \times 4 = 64 = 4^3$ solcher Verbindungen zu 3 und 3.

Für 5 Buchstaben wäre $5^3 = 125$, und für m Buchstaben wäre m^3 die Anzahl dieser Verbindungen.

3) Fährt man damit fort, so wird die Anzahl der Verbindungen jedesmal um so viel mal größer als es Buchstaben sind.

Für 4 Dinge wäre die Anzahl der Verbindungen zu 5 und 5 $= 4^5$.

Für m Dinge wäre überhaupt die Anzahl der Verbindungen zu n und n zusammengesetzt $= m^n$.

Man unterscheidet diese Verbindungen klassenweise, indem man die Verbindungen zu

2 und 2 zu der 2ten Klasse rechnet, die zu
3 und 3 zu der 3ten Klasse, die zu
4 und 4 zu der 4ten Klasse, und so weiter.

Die Elemente woraus die Klaſſen beſtehen, heißen
Unionen in der 1ſten Klaſſe,
Binionen in der 2ten Klaſſe,
Ternionen in der 3ten Klaſſe, und ſo weiter.

Nro. 56. Mechaniſches Verfahren zur Darſtellung der Permutationen mit Wiederholungen.

Nach dem in der folgenden Tafel C aufgeſtellten Beiſpiel, ſchreibt man die gegebenen Dinge, wie hier die 4 Buchſtaben a, b, c, d in der

1ſten Spalte, der Ordnung nach ſo viel mal unter einander als die höchſte Klaſſe zu der man gelangen will Elemente hat; in die

2te Spalte ſetzt man für die 2te Klaſſe den erſten Buchſtaben ſo viel man unter einander, als die 1ſte Klaſſe Unionen hat, das heißt ſo viel mal als man Buchſtaben dafür hat, hiernach den zweiten und jeden folgenden eben ſo viel mal; ſtehen ſie auf dieſe Art alle unter einander, ſo fängt man wieder von vorn damit an, in die

3te Spalte ſetzt man für die 3te Klaſſe jeden Buchſtaben ſo oft unter einander als die 2te Klaſſe Binionen hat, und auf dieſe Art ſchreitet man zu allen höheren Klaſſen fort, indem man in der folgenden Spalte jeden Buchſtaben ſo oft wiederholt als die vorgehende Klaſſe Elemente hat.

In der 1ſten Spalte erſcheinen alſo die ſämmtlichen Unionen.

In der 1ſten und 2ten Spalte, die Binionen.

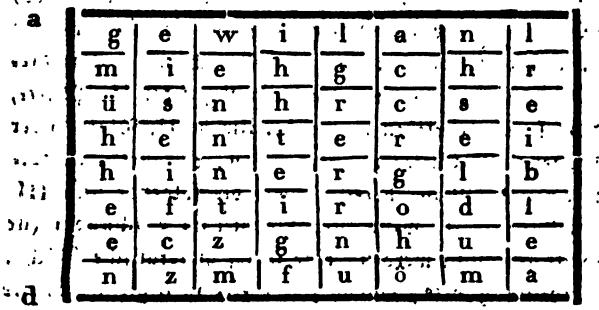
In der 1ſten, 2ten und 3ten Spalte, die Ternionen, u. ſ. w.

Tafel C.

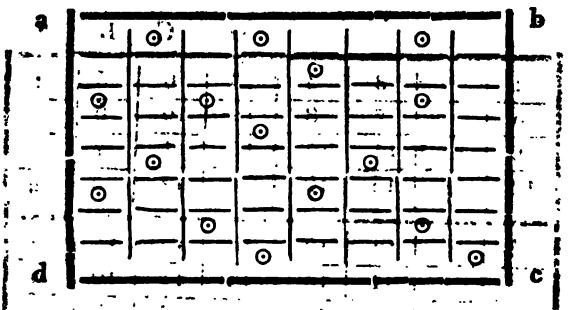
I.	II.	III.	IV.
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a
a	b	a	a
b	b	a	a
c	b	a	a
a	c	a	a
b	c	a	a
c	c	a	a
a	a	b	a
b	a	b	a
c	a	b	a
a	b	b	a
b	b	b	a
c	b	b	a
a	c	b	a
b	c	b	a
c	c	b	a
a	a	c	a
b	a	c	a
c	a	c	a
a	b	c	a
b	b	c	a
c	b	c	a
a	c	c	a
b	c	c	a
c	c	c	a
a	a	a	b
b	a	a	b
c	a	a	b
etc.	etc.	etc.	etc.

Nro. 57. Die Gitterschrift.

I.



II.



Um die Schrift zu lesen, welche durch die Buchstaben in den Fächern der I. Platte mitgetheilt wird, hat man die II. Platte nöthig. Diese ist in eben so viel Fächer abgetheilt, wovon der vierte Theil ausgeschnitten ist. Die ausgeschnittenen Fächer sind hier mit ⊙ bezeichnet. Legt man nacheinander die II. auf die I. Platte, so daß 1tens die mit den gleichen Buchstaben a, b, c, d, be-

zeichnete Ecken auf einander fallen, daß hiernach auf die Ecken a und b der I. Platte, 2tens die Ecken b und c, 3tens die Ecken c und d und 4tens die Ecken d und a der II. Platte fallen, so kommen die Buchstaben, durch die Oeffnungen der II. Platte, nach und nach in der zum Lesen erforderlichen Ordnung zum Vorschein, denn in dieser Ordnung sind sie durch die Oeffnungen der II. Platte, auf die I. eingeschrieben worden*). Um die II. Platte, oder das sogenannte Gitter zu verfertigen, verfährt man folgenderweise. Man bereitet, wie die folgende und III. Darstellung zeigt, wenn zum Beispiel 64 Buchstaben zur Schrift gebraucht werden, eine in 64 quadratische Fächer eingetheilte Platte, wovon jede Seite in 8 gleiche Theile zerfällt.

III.

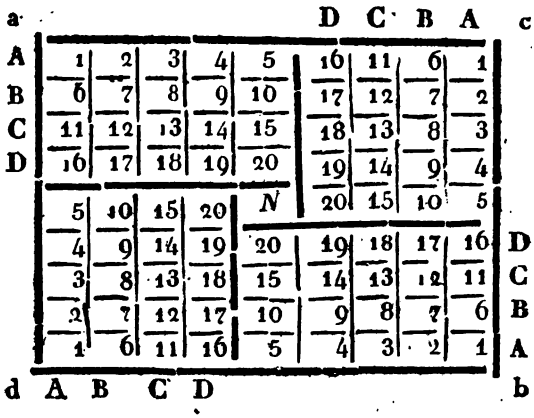
a					D	C	B	A	b
A	1	2	3	4	13	9	5	1	
B	5	6	7	8	14	10	6	2	
C	9	10	11	12	15	11	7	3	
D	13	14	15	16	16	12	8	4	
	4	8	12	16	16	15	14	13	D
	3	7	11	15	12	11	10	9	C
	2	6	10	14	8	7	6	5	B
	1	5	9	13	4	3	2	1	A
d	A	B	C	D					c

*) Die Fächer werden bei der wirklichen Anwendung nur mit Bleistift ausgezogen und wenn die Schrift eingetragen ist, wieder ausgelöscht.

Man theilt das ganze Quadrat a b c d, in vier gleiche Theile, die nach den Buchstaben a, b, c, d an den Ecken benannt werden. In die Fächer dieser Theile, schreibt man reihenweise nach der Ordnung der beigesetzten Buchstaben A, B, C, D die Zahlen von 1 bis 16 ein, welches der 4te Theil der sämmtlichen Fächer des ganzen Quadrats ist. Man schneidet alsdann in beliebiger Ordnung 16 Fächer, oder den vierten Theil aller Fächer im ganzen Quadrat aus, nur mit Beobachtung der Regel, daß keine eingeschriebene Zahl mehr als einmal im ganzen Quadrat ausgeschnitten werden darf; wenn die Zahlen 2, 4, 9, 11, 16 zum Beispiel, wie in der II. Darstellung in dem Theil a ausgeschnitten worden sind, so dürfen sie in keinem der drei übrigen Theile ausgeschnitten werden. Der Grund dieser Regel ist leicht einzusehen; durch das viermalige Umlegen des Gitters, sollen die Oeffnungen desselben, nach und nach alle 64 Felder der zum Schreiben ebenso eingetheilten Platte I., bloß geben. Schnitte man nun zum Beispiel, die vier mit 1 beschriebenen Eckfelder aus, so würde man sie nur für einen einzigen Buchstaben benutzen können, da sie beim Umlegen des Gitters nach und nach auf dasselbe Eckfeld bei a der untergelegten Tafel I. fallen, und ebenso verhält es sich mit den übrigen correspondirenden Feldern.

Ist die Zahl der sämmtlichen Felder des Quadrats a b c d eine ungrade Zahl, wie z. B. 81 in der folgenden und IV. Darstellung:

IV.



so zieht man 1 davon ab, und theilt den Rest durch 4, welches hier 20 Felder, für jeden der vier Theile giebt. Das übrige Feld N in der Mitte, beschreibt man am Ende mit einem beliebigen Buchstaben, um keine weiße Stelle übrig zu lassen.

Für ein Gitter von 100 Fächern würde der vierte Theil ein Quadrat von 25 Fächern seyn, und um diese mit den Zahlen von 1 bis 25 reihenweise zu beschreiben, müßte man sich der 5 Buchstaben A, B, C, D, E, ebenso wie der vier ersten im obigen zum Leitfaden bedienen. Die Menge der möglichen Veränderungen des Gitters im Ausschneiden, ist wie die Berechnungsgründe im Nachfolgenden zeigen, so ungeheuer groß, daß man diese Art Geheimschrift, deren Erfinder bis jetzt noch unbekannt ist, mit Recht für diejenige hält, die am wenigsten, wo nicht ganz unmöglich zu dechiffriren ist.

Das Gitter II. von 64 Feldern leidet schon über 1073

Millionen Veränderungen; das Gitter IV. von 81 Feldern, läßt sich beinah 274878 millionenmal verändern.

Diese Menge wird aber dadurch noch 24 mal größer, daß man das Gitter auf 24erlei Arten umwenden kann, indem man bei den 4 Umwendungen an keine andere Ordnung gebunden ist, als über die man einig wird. Auch läßt sich das Eintragen der Schrift, nach beliebiger Verabredung zur Korrespondenz, auf mehrere Arten bewerkstelligen; nämlich horizontal oder vertical, von Oben nach Unten, oder von Unten nach Oben, entweder von der Linken zur Rechten, oder von dieser zu jener, oder auch abwechselnd einmal von der Linken zur Rechten, und einmal umgekehrt, wodurch die Anzahl der Veränderungen noch viel größer wird.

Wenn, wie in Nro. 30 S. 38 gezeigt, das bloße Abzählen einer Billion, wenn man Tag und Nacht ohne Unterbrechung fortzählen könnte, über 19000 Jahre erfordert, wie dürfte man hoffen, eine solche Schrift, durch Versuche entziffern zu können? Die Größe des Gitters wird durch die Größe der Schrift, wozu man es nöthig hat bestimmt; sie kann aber dadurch sehr beschränkt werden, wenn man viel zu schreiben hat, daß man die Fächer mit Sylben, mit abgekürzten Wörtern oder auch mit ganzen Wörtern, anstatt der einzelnen Buchstaben anfüllen kann, ohne daß man für das Geheimniß besorgt seyn dürfte.

Berechnung der möglichen Veränderungen der Gitter.

Die Anzahl dieser Veränderungen, wird durch den vierten Theil der Permutationen mit Wiederholungen

(Nro. 55) von den vier Buchstaben a, b, c, d, womit die 4 Viertel des Gitters bezeichnet werden, in derjenigen Klasse gefunden, welche durch die Zahl der Fächer in jedem Viertel bestimmt wird.

Es sey, um dieses vorerst an einem Beispiel zu zeigen, das Gitter II. oder III. von 64 Fächern zu berechnen; so hat man es mit der 16ten Klasse der Buchstaben a b c d zu thun, weil jedes Viertel 16 Fächer hat.

Nimmt man nach Belieben eine von den Verbindungen aus dieser Klasse, wie die folgende, setzt man der Ordnung nach die Zahlen 1 bis 16 unter die Buchstaben woraus diese Verbindung besteht, wie hier

a, d, c, b, b, c, a, d, c, a, b, a, d, b, c d,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,

und schneidet man hiernach im

ersten Viertel a, alle Fächer aus, deren Zahlen hier unter a stehen, im

zweiten Viertel b, alle Fächer deren Zahlen unter b stehen, im

dritten Viertel c, alle Fächer deren Zahlen unter c, und im

vierten Viertel d, alle Fächer deren Zahlen unter d stehen,

so werden im ganzen Gitter nach Erforderniß 16 Fächer ausgeschnitten, wovon keins die Zahl des andern hat.

Nun kann man aber immer nur von denjenigen Verbindungen eine wählen, die mit a anfangen, wenn das erste Fach in dem Viertel a geöffnet werden soll, oder die mit b oder c oder d anfangen, wenn das erste Fach im Viertel b, oder c oder d, geöffnet werden soll, und hierdurch wird die Wahl, auf den vierten Theil aller Verbindungen der 16ten Klasse beschränkt. Die Anzahl aller mög-

lichen Veränderungen des Gitters von 64 Fächern, wird also durch den Ausdruck

$$\frac{4^{16}}{4} = 4^{15} \text{ oder durch}$$

$$\frac{4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4}{4}$$

$$= 4^{16-1}$$

$$= 4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4$$

$$= 4^{15} = 1073741824$$

bestimmt.

Jede Klasse der Permutationen mit Wiederholungen wird durch die Anfangsbuchstaben ihrer Elemente, in so viel gleiche Unterabtheilungen oder Ordnungen getheilt, als verschiedene Buchstaben zu ihrer Darstellung gegeben sind, denn es ist kein Grund vorhanden, daß die Anzahl der Elemente die mit a anfangen größer seyn sollte, als die Anzahl derjenigen, die mit b, oder c u. s. w. anfangen, und von diesen läßt sich wieder dasselbe behaupten. Die Anzahl der Elemente in jeder Ordnung derselben Klasse, wird also gefunden, wenn man die sämmtlichen Elemente der Klasse durch die Anzahl der gegebenen Unionen dividirt.

Für jedes Gitter kommen nur die 4 Unionen, a, b, c, d in Betrachtung, die Anzahl der Veränderungen ist also dabei beständig der vierte Theil der Elemente der Klasse, welche durch die Anzahl der Fächer in jedem Viertel bestimmt wird, oder deren Exponent der Anzahl dieser Fächer gleich ist, und um diesen vierten Theil auszudrücken, darf man also immer nur 1 von dem Exponent subtrahiren, weil 4 die Grundzahl dabei ist. —

Hat das Gitter eine ungrade Anzahl von Fächern, so subtrahirt man, wie im Vorgehenden schon bemerkt, 1 von

dieſer Anzahl und der Reſt wird ſich immer rein durch 4 dividiren laſſen. *)

Hat das Gitter zum Beiſpiel 81 Fächer, (wie IV.) ſo iſt die Zahl 80 in 4 Theile zu theilen, und es kommen 20 Fächer auf jedes Viertel.

Man hat es hierbei alſo mit der 20ten Klaſſe der Permutationen mit Wiederholungen der Buchſtaben a, b, c, d zu thun, folglich 1 von dem Exponent 20 zu ſubtrahiren, und $4^{10} = 274,877,906944$ für die Anzahl der möglichen Veränderungen des Gitters zu nehmen.

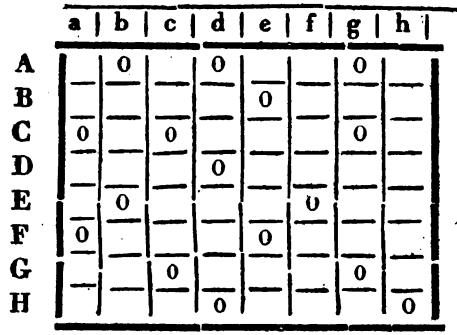
Nro. 58. Die Mittheilung des Schlüſſels zur Gitterſchrift.

Je nachdem der Umfang der Schrift größer oder kleiner wird, muß auch das Gitter größer oder kleiner genommen werden. Es müſſen daher auch zur Mittheilung des Schlüſſels für die nöthigen Veränderungen, geheime Mittel verabredet werden, wie zum Beiſpiel die folgenden:

---

*) Jede ungrade Zahl liegt in der Form $2n + 1$; als dem Ausdruck für
1 wenn $n = 0$
3 " $n = 1$
5 " $n = 2$ u. ſ. w.
Jede ungrade Quadratzahl daher, in der Form $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$; ſubtrahirt man 1 davon, ſo iſt der Reſt $4n^2 + n$ offenbar durch 2 theilbar.

I.



Der Schreiber verfertigt sich ein Gitter nach der gegebenen Regel, bezeichnet dann die Verticalschichten mit den kleinen Buchstaben und die Horizontalschichten mit den großen Buchstaben, wie in der gegenwärtigen Darstellung.

Um hiermit die geöffneten Fächer anzudeuten, nimmt er die Buchstaben-Folge:

Abdg für die Oeffnungen in der Schichte A
Be . . . . . B
Cacg C
Dd . . . . . D
Ebf . . . . . E
Fae . . . . . F
Gcg . . . . . G
Hdh . . . . . H

Auch können diese Buchstaben-Verbindungen, in einer Reihe

Abdg Be Cacg Dd Ebf Fae Gcg Hdh

neben einander gesetzt werden, indem die Hauptbuchstaben den Anfang einer neuen Schichte schon von selbst anzeigen.

Der Correſpondent, welcher dieſe Anzeige an einer verabredeten Stelle der Schrift findet, verfertigt nun auch ein Gitter nach derſelben, im verabredeten Maßſtabe, und zwar von 8 Fächern in jeder Schichte, wenn er wie im gegenwärtigen Beiſpiel nicht mehr als 8 verſchiedene Buchſtaben zählt. Hierauf öffnet er nun

1ſtens, die in der Schichte A unter den Buchſtaben b, d, g liegenden Fächer,

2tens in der Schichte B, das unter e liegende Fach, und ſo weiter.

Anſtatt des vorgehenden Mittels, kann auch das folgende, als eine ſinnreiche Anwendung des dyadiſchen Zahlenſyſtems, welches ſpäter erklärt wird, dienen.

II.

128	64	32	16	8	4	2	1
	0		0			0	
				0			
0		0				0	
			0				
	0			0	0		
0				0			
		0				0	
			0				0

Man läßt die geöffneten Fächer für eben ſo viel gelten als die Zahlzeichen des dyadiſchen Syſtems in denſelben Stellen, von der Rechten zur Linken gezählt, gelten würden, und überſchreibt zu dem Ende die Verticalſchichten, mit ihren Werthen im Decimalſyſtem.

1) Um hiermit die Oeffnungen in der erſten Horizontalſchichte anzuzeigen, addirt man die Werthe der

überschriebenen Decimalzahlen 2, 16 und 64 welche 82 ausmachen.

2) Die einzige Oeffnung in der 2ten Horizontalschichte, wird hiernach durch 8 angezeigt.

3) Durch die Summe 162, der Zahlen 2, 32, 128 werden die 3 Oeffnungen der 3ten Schichte angezeigt.

4) Durch 16 die Oeffnung in der 4. Schichte.

5) Durch die Summe 68 von 4 und 64 die Oeffnungen der 5ten Schichte.

6) Durch die Summe 136 von 8 und 28 die Oeffnungen der 6ten Schichte.

7) Durch die Summe 34 von 2 und 32 die Oeffnungen der 7ten Schichte.

8) Durch die Summe 17 von 1 und 16 die Oeffnungen der 8ten Schichte.

Diese Zahlen können nun neben einander geschrieben und durch Puncte und Comma's unterschieden werden, wie hier

82, 8. 162. 16, 68, 136. 34. 17.

Derjenige dem diese Anzeige gemacht wird, weiß daß die erste Zahl 82 zur Linken, den Werth der dyadischen Zahlzeichen über die Oeffnungen in der 1sten Schichte ausdrückt, und stellt diesen Werth nun mit dem dyadischen Zahlzeichen 1 dar, dessen Stellen ihm dann die Stellen der geöffneten Fächer angeben, welche der Schreiber hingegen mit 0 bezeichnet hatte.

Die Zahl 82 wird auf diese Art durch

01010010

dargestellt, woraus es dann ersichtlich wird, daß in der 1sten Horizontalschichte, von der Rechten zur Linken

gezählt, das 1ste Fach bedeckt,
2te " offen,
3te " bedeckt,
4te " bedeckt,
5te " offen,
6te " bedeckt,
7te " offen,
8te " bedeckt

seyn soll; und auf eben diese Art findet er die Oeffnungen der folgenden Horizontalschichten.

Nro. 59. Die Dechiffrirkunst.

Wegen der unerschöpflichen Mannigfaltigkeit der Formen, kann es keinen allgemeinen Schlüssel zur Entzifferung jeder Geheimschrift geben, wenn diese auch nicht von der Art ist, daß sie alle Bemühungen zur Entdeckung des ihr eigenthümlichen Schlüssels vereitelt. —

Die ersten, welche sich zur Geheimschrift mit einander verabredeten, glaubten ihren Zweck wohl hinlänglich dadurch zu erreichen, daß sie die gewöhnlichen Buchstaben mit anderen Schriftzeichen verwechselten. Eben so kam man auch am natürlichsten zuerst auf den Gedanken, daß das Geheimniß nur hierunter verborgen seyn könnte, und indem man den fremden Zeichen, nach und nach einen andern Buchstaben unterlegte und Wörter damit zu bilden suchte, so konnte es nicht fehlen, daß man diejenigen die sie vorstellten, mit etwas Mühe und Geduld auch wirklich heraus brachte. Dieß ist noch immer der Weg, den man zur Entzifferung solcher Schriften einschlägt, so lang man noch keine Ursache hat, einen andern Schlüssel dafür zu suchen, nur hat die Erfahrung mancherlei Vortheile zur Abkürzung desselben an die Hand gegeben.

Vor allen Dingen muß man die Sprache kennen, worin die Schrift geschrieben, weil es ohne dieß nicht möglich ist, ein verständliches Wort heraus zu bringen.

Dieselben Zeichen müssen größtentheils zu wiederholten Malen vorkommen, denn es wird nur durch das Aufsuchen ihres verhältnißmäßigen Vorkommens, und die Betrachtung ihrer Anordnung möglich, ohne endlose Weitläuftigkeiten etwas über ihren Sinn heraus zu bringen, da die Buchstaben auf so unzählig vielerlei Arten zusammen gesetzt werden können.

Eine kleine, nur aus wenigen Zeilen oder Wörtern bestehende Geheimschrift kann nur dann entziffert werden, wenn zu jedem Buchstaben nur ein einziges Zeichen gebraucht worden ist, und es wird dabei um so leichter sie zu entziffern, wenn die Wörter von einander getrennt sind. Sind aber mehrere Zeichen für einen und ebendenselben Buchstaben gebraucht worden, und bedeuten sie auch abgekürzte oder gar ganze Wörter, so muß die Schrift nach Maßgabe dieser Zeichen, schon eine gewisse Ausdehnung haben, wenn ihre Entzifferung möglich seyn soll.

Man beginnt die Untersuchung daher damit, daß man aufzählt und anmerkt wie vielmal jedes Zeichen vorkommt. Es kann zwar geschehen, daß hiermit noch nichts gewonnen wird, allein man darf nichts unbenutzt lassen, was zu einer Entdeckung führen könnte.

Alsdann untersucht man, ob sich nichts besonderes, und mehrere Mal vorkommendes in der Anordnung der Zeichen findet, ob nämlich mehrere Zeichen nach derselben Ordnung mit einander verbunden sind, oder wenigstens ähnliche Verbindungen darstellen.

Hiernächst muß man auf die besonderen Eigenthümlichkeiten der Sprache, worin die Schrift gegeben seyn kann, bei der Bildung der Wörter, Rücksicht nehmen. Für die deutsche Sprache hat man die folgenden Erfahrungssätze aufgestellt.

1) Die Vocale sind diejenigen Buchstaben, die am meisten gebraucht werden, und zwar nach der folgenden Rangordnung, E, I, A, U, O, es kommt nämlich E häufiger vor als I, der Buchstab I häufiger als A, dieser häufiger als U, und O ist der am wenigsten gebräuchlichste Selbstlauter.

2) Unter den Mitlautern ist N der gewöhnlichste, welcher zwar so oft nicht vorkommt als der Selbstlauter E, aber doch öfter als die übrigen Vocalen.

3) Auf N folgen die Mitlauter D, R, S die noch stärker im Gebrauch sind als I, womit T ungefähr gleich zu setzen ist.

   Die Mitlauter L, F, K, Z werden nicht öfter gebraucht als O, und weniger als diese, die Mitlauter P, Q, V, X.

4) B steht im Anfang keines Wortes von zwei Buchstaben, und auch niemals als doppelter Buchstab in der Mitte eines Wortes, aber die Mitlauter F, M, N, S, T kommen gern doppelt vor; weswegen man unter einem wiederholten Zeichen auch immer zuerst einen wiederholten Mitlauter zu vermuthen hat.

5) Das C wird nie zu einem Wort von zwei Buchstaben gebraucht, kann nur in Namen auf zwei Selbstlauter folgen oder als Endbuchstab erscheinen, und es giebt kein deutsches Wort worin es dreimal vorkommt; Ch steht oft zusammen.

6) Das D findet sich nie dreimal in einem Wort, geht

keinem Doppelbuchstaben vorher, und zeigt sich nie als zweiter und Endbuchstab zugleich.

7) Das E kommt zum Anfang keines Wortes doppelt vor, welches dem Buchstaben A ausschließlich zugestanden ist. Nur in dem Wort EE findet man es zugleich als zweiten und Endbuchstaben.

8) Das F geht keinem doppelten Buchstaben vorher.

9) Die Buchstaben G und H werden nie zu einem Wort von zwei Buchstaben gebraucht, ausgenommen in HA!

10) J kommt in keinem Wort zweimal nach einander oder am Ende vor.

11) K wird in keinem Wort verdoppelt, zu keinem Wort von zwei Buchstaben, und in keinem größern Wort als zweiter Buchstab gebraucht.

12) Das L findet sich in keinem Wort von zwei Buchstaben und zwischen zwei L kein doppelter Buchstab.

13) Das M kann nur am Ende eines Worts vor zwei Buchstaben stehen, nie in der Mitte eines Worts von 3 Buchstaben, und zwischen zwei M steht nie ein doppelter Buchstab.

14) Das N zeigt sich vor keinem doppelten Buchstab, nur mit Ausnahme des Wortes Schnee, und schließt in keinem deutschen Wort einen doppelten Buchstab ein; es folgt oft auf E.

15) O ist der einzige Buchstabe der allein stehend gefunden wird, nur das zweibuchstabige Wort ob kann damit anfangen.

16) P kommt in keinem Wort von drei Buchstaben vor, ausgenommen in Par, und geht keinen andern doppelten Buchstaben vorher als dem FF, es zeigt sich nie dreimal in einem Wort, und auſſer dem Wort Knapp und einigen Namen nie am Ende.

17) Q erſcheint nur vor U, niemals doppelt, niemals zwiſchen einerlei Buchſtaben, nie als zweiter Buchſtab vom Anfang, oder als letzter, vorletzter und vorvorletzter Buchſtab eines Wortes.

18) R wird zu keinem Worte von zwei Buchſtaben gebraucht; ſteht es im Anfang des Wortes, ſo folgt kein doppelter Buchſtab darauf außer in Raab; es geht auſſer dieſem, und den Wörtern Burggraf, Berggrün, auch keinem andern doppelten Buchſtaben vorher als dem ff; ſteht aber in der Mitte vieler Wörter, und folgt oft auf E.

19) S kommt in keinem Worte von zwei Buchſtaben, auſſer in ſo als erſter Buchſtab vor, drei für Conſonanten gehaltene Zeichen können ſch bedeuten.

20) T wird auſſer in Tag, Ton, Tod zum Anfang keines Wortes von zwei und drei Buchſtaben gebraucht, und geht nie einem doppelten Buchſtaben vorher.

21) U oder V wird zum Anfang eines Wortes nie vor einem doppelten Buchſtaben gebraucht, auſſer in unnütz, und kommt in keinem Worte auſſer Genugthuung doppelt vor, wenn man es in den Wörtern zuvor und Zuverſicht nicht auch als einen doppelten Buchſtaben anſieht. Auf U folgt oft nd, wie in und.

22) W wird zu keinem Worte von zwei Buchſtaben auſſer wo gebraucht, und ſteht vor keinem doppelten Buchſtaben auſſer in Waage.

23) X dient nie zu einem Worte von zwei Buchſtaben, oder zum Anfang eines Wortes, wenn es kein urſprünglich fremdes Wort iſt.

24) Y dient faſt nie zum Anfang eines Wortes.

25) Z dient zu keinem Wort von zwei Buchſtaben als in z u, iſt auch nie der zweite Buchſtab eines urſprünglich deutſchen Wortes, und kommt nicht dreimal in demſelben Wort vor.

26) Aus den kurzen Wörtern a n, a u c h, d a s, d e r, w i e, i h m, w i l l, a u f laſſen ſich die Buchſtaben A, C, H, S, R, W, M, L, F gern errathen, ſo wie die Buchſtaben J, N, U, D durch die Wörter e i n, u m, u n d.

Daß dieſe Bemerkungen aber allein noch nicht dazu hinreichen das Räthſel zu löſen, dieß wird man ſchon an dem nachfolgenden Beiſpiel der leichteren Gattung erfahren, es wird der Combinationsgabe zur Uibung daran in jedem Fall noch Spielraum genug gelaſſen, und in dieſer Rückſicht darf der Leſer, welcher ſich den Zeitvertreib machen will, die Auflöſung ſelbſt zu ſuchen, ſich von der Beſorgniß nicht abhalten laſſen, ſeine Zeit ganz unnütz damit zu verlieren.

Bei der nachſtehenden Anleitung zur Entzifferung des Beiſpiels muß man übrigens vorausſetzen, daß manche fruchtloſe Verſuche, zur Vermeidung einer unnöthigen Weitläuftigkeit übergangen worden ſeyen.

Beispiel der Geheimschrift.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	a	b	c	d	c	e	f	g	f	h	i	k	l	m	i	n	c	a	c	e	o	e	g	f	a
2	p	l	i	q	c	f	r	s	t	i	t	u	i	p	u	s	t	c	f	o	c	k	i	c	f
3	a	b	c	v	b	i	a	c	f	f	u	i	g	e	o	c	p	c	i	q	c	f	b	v	n
4	b	a	c	e	p	z	e	g	s	t	p	i	c	t	e	f	p	r	k	u	f	o	a	c	e
5	g	f	o	e	g	f	a	a	c	p	n	b	a	c	e	p	z	e	g	s	t	p	f	b	s
6	t	i	c	e	n	c	b	p	k	b	s	t	b	p	i	r	t	f	c	q	n	c	b	h	c
7	k	p	b	f	a	d	b	c	k	c	f	u	i	g	e	o	c	p	c	i	q	c	f	r	s
8	t	g	f	w	c	x	u	f	f	i	u	w	c	e	p	b	c	n	c	e	a	c	f	a	c
9	f	c	f	a	b	c	n	b	e	w	c	e	c	b	i	p	x	c	f	f	c	f	f	b	s
10	t	i	c	f	i	o	c	o	c	f	p	i	c	t	c	f									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Die folgende Tabelle zeigt wie vielmal jedes Zeichen dieſer Schrift gebraucht worden iſt, und es folgen dieſelben, zur bequemern Uiberſicht der Ordnung ihrer Anzahl gemäß nacheinander; man findet nämlich:

46	mal das Zeichen	c
31	" " "	f
19	" " "	i
18	" " "	b
16	" " "	e
15	" " "	p
14	" " "	a
12	" " "	t
9	" " "	g
9	" " "	s
8	" " "	o
7	" " "	u
7	" " "	n
6	" " "	k
4	" " "	q
4	" " "	r
3	" " "	w
2	" " "	d
2	" " "	h
2	" " "	l
2	" " "	v
2	" " "	x
2	" " "	z
1	" " "	m
241	mit . .	24 verſchiedenen Zeichen.

Je kürzer die Geheimſchrift iſt, deſto eher können die Wiederholungen der Zeichen, von dem im Vorgehen-

den bemerkten Verhältniß der Buchstaben-Wiederholungen abweichen; da sich aber für den Anfang nichts Besseres über ihre wahrscheinliche Bestimmung darbietet, so nehmen wir

1) den Buchstaben E für das 46 mal vorkommende Zeichen c und den Buchstaben N für das 31 mal gebrauchte Zeichen f zur Benutzung des 1sten und 2ten Erfahrungssatzes an, da man aus der Anzahl der verschiedenen Zeichen, in Vergleichung mit dem Umfang der Schrift, schon vermuthen kann, daß für jeden Buchstaben nicht mehr als Ein Zeichen gebraucht worden ist.

2) Da i 19 mal vorkommt, so bedeutet es entweder J, D, R, S oder T, diese Buchstaben können aber auch mit den hiernach am häufigsten vorkommenden Zeichen b, e, p, a gemeint seyn, worüber nun Versuche zu machen sind.

Der 3te Buchstab ist nach unserer Annahme das E, versucht man jetzt für die beiden vorstehenden Zeichen a, b jeden der 5 Buchstaben nach einander, so kommt man unter andern auf das Wort Die, und es ist hiernach höchst wahrscheinlich, daß a für D und b für J gesetzt ist; ja was diese Wahrscheinlichkeit noch vermehrt ist der Umstand, daß die Zeichen-Verbindung abc, noch zweimal vorkommt, nämlich im Anfang der dritten Linie und in der 4ten, 5ten und 6ten Stelle der 9ten Linie.

3) Wir benutzen diese Entdeckung nun auch zum Abschnitt der vor und nach der Verbindung abc stehenden Wörter, vermittelst zweier Puncte, so wie auch die Verbindung cf, welche en bedeutet, da diese Endigung eine der gewöhnlichsten der deutschen Wörter ist.

4) Da der Buchstab T dem J am nächsten im Gebrauch kommt, so nehmen wir das Zeichen i für T, und aus gleichem Grunde e für R und p für S.

5) Für die auf das erste Wort die: zunächstfolgenden Zeichen dcefgfhiklmincace ꝛc. können wir jetzt d. Buchstaben .ern. n. t....t.eder unterlegen, zwischen n und n gehört nothwendigerweise ein Vocal, davon werden aber die Vocalen e und i ausgeschlossen, wofür die Zeichen schon gefunden sind. O kommt ausser dem erinnerlichen Wort Nonne in keinem andern zwischen n und n vor, und steht überdieß hier vor einem doppelten n, wovon das zweite mit dem Zeichen h nicht übereinstimmen würde; eine ähnliche Ueberlegung nöthigt uns den Vocal a hier zu verwerfen und demnach u für g anzunehmen; so erhalten wir denn d c e f g f h i und es ist nun leicht

.e r nun. t

zu rathen, daß d nichts anders als V und h kein anderer Buchstab als F seyn kann; womit dann das Wort V e r n u n f t heraus kommt.

5) Für die folgenden Zeichen k l m i n c a c e o e g f a haben wir nun die Unterlage ....t. e d e r. r u n d

Die Buchstabenfolge t . eder, kann nicht wohl durch etwas anders als W unterbrochen seyn, welches das Wort w e d e r giebt; da nun das folgende Zeichen O den Anfang eines Worts ausmacht, so kann es nur als g der Sylbe r und vorhergehen, und man liest damit das Wort G r u n d. Die folgende Zeile beginnt mit p das ist mit f, der dritte Buchstab ist t, der fünfte wieder e, und wir werden damit

sogleich an o e g f a p l i q c erinnert, demnach ist l für ä und q für Z gesetzt.

7) Mit dem bisher Gefundenen können wir nun der Schrift die folgende Eintheilung und Unterlage geben.

1) abc : dcefgfhi : klmi : ncace : oegfapliqc :
Die : Vernunft: . ä . t : weder : Grundsätze.
2) frstituipustcf : ockicf : abc : vbi acf :
n...t..tf..en : ge.ten : bie : .itben :
3) fuigeocpciqcf : bv : nbacepzegst pictcf :
N.turgesetzen : i. : Widerf.ru..ste.en
4) prkufo : ace : gfoegfa : acp : nbacepzegstp :
f...ng : ber : Ungrund : der : Widerf.tu..s.
5) fbsticencbpkbst : bpi : rtfcqncbhck :
ni..t erweif..i.. : ist : ..ne zweife.
6) phfa : dbikc : fuigeocpciqc : frstgfwcx :
sind : vie e : N.turgesetze.e un.e.
7) uffiuwce : pbc : nceacf : acfcf : abc : nbe
.nnt .. er : sie : werden : denen : die : wir
8) wcecbip xcffcf : fbsti cfiococf : pictcf
..ereits .ennen : ni t entgegen : ste.en.

8) Untersuchen wir die Verbindungen, worin sich das Zeichen K befindet, so läßt uns diejenige zu Ende der 5ten Zeile der obigen Aufstellung, nicht in Ungewißheit mehr darüber, indem die Buchstabenfolge Zweife nicht wohl anders als mit l sich endigen kann; auch paßt dieser Buchstab sehr gut zu der Verbindung ockicf in der zweiten Zeile, und macht damit das Wort gelten. Setzen wir denselben nun auch für
k in die zweite Verbindung der 6ten Zeile dbike so kommt das Wort . . . . . viele

heraus, und für die dritte Verbindung der ersten Zeile nämlich für klmi, kommt

lät

und die Beziehung worin diese Verbindung steht, läßt gar keinen Zweifel darüber, daß der doppelte Buchstab ß mit m gemeint ist; so daß man also läßt für klmi nehmen muß. Bringt man den Buchstab l für das Zeichen k nun auch in die Verbindung womit die 5te Zeile anfängt, nämlich in fbsticencbpbst

ni..terweisli..

so wird es klar, daß sie nur mit ch sich endigen kann, daß s für c und t für þ gelten soll, womit denn die beiden Wörter, nicht erweislich, heraus kommen. Benutzen wir jetzt die Entdeckung von c und þ weiter, so können wir auch die Verbindung fbsti in der letzten Zeile lesen, ferner die

nicht

Verbindung zu Ende der 3ten und 8ten Zeile nämlich pictef

durch stehen

ergänzen, so wie die beiden Verbindungen in der Mitte der 3ten und 4ten Linie

nbacepzegst und nbacepzegstp

Widerf.ruch Widerf.ruchs

weiter entwickeln, worin der nur noch fehlende Buchstabe schlechterdings kein anderer als p seyn kann, womit das Wort Widerfpruch ergänzt wird.

9) Unter den gefundenen Vocalen vermissen wir noch A und O; den ersten finden wir ohne Mühe in der Verbindung zu Anfang der 3ten Zeile, worin u nichts anders als a bedeuten kann, nämlich in

fuigeocpciqcf
N.turgeſetzen

welches offenbar Naturgeſetzen heißen ſoll und die Verbindung der beiden Zeichen br im Anfang
ſ.
der 4ten Zeile giebt jetzt den Selbſtlauter o zu erkennen, da es, wie im Vorgehenden bemerkt kein anders deutſches Wort von zwei Buchſtaben giebt als ſo, welches mit ſ anfängt.

10) Von den nun noch übrigen Verbindungen, kann diejenige die wir am Ende der 2ten Zeile finden, nämlich vbi acf keinen Sinn erhalten, als wenn
it den
man m für das Zeichen v nimmt, und mit den lieſt.

11) Die Verbindung wceebip im Anfang der 8ten
ereits
Zeile giebt das Zeichen w für den noch fehlenden Buchſtabe b womit wir bereits leſen.

12) Die Verbindung womit die 6te Zeile aufhört und die 7te anfängt, iſt nun bis auf das Zeichen x beſtimmt und erhält keinen Sinn als durch den Buchſtaben k, welcher für gfwcxuſſi, das Wort
unbekannt
giebt, womit nun auch die zweite Verbindung der 8ten Zeile lesbar wird, nämlich xcffcf
Kenner.

Wird hiernach das folgende Zeichen-Alphabeth aufgestellt, nämlich

u	für	A
w	"	B
s	"	C
a	"	D
c	"	E
h	"	F
o	"	G
t	"	H
b	"	J
x	"	K
k	"	L
v	"	M
f	"	N
r	"	O
z	"	P
e	"	R
p	"	S
i	"	T
g	"	U
d	"	V
n	"	W
q	"	Z
l	"	ä
m	"	ß

so erhält man damit die nachstehende vollständige Entzifferung des gegebenen Beispiels.

1) abc dcefgfhi klmi ncace oegfapliqc
Die Vernunft läßt weder Grundsätze
2) frst ituipustcf ockicf abc vbi acf
noch Thatsachen gelten, die mit dem

3) fuigeocpciqcf bv nbacepzegst pictcf
Naturgeſetzen im Widerſpruch ſtehen,
4) pr kufo ace gfoegfa acp nbacepzegstp
ſo lang der Ungrund des Widerſpruchs
5) fbst cencbpkbst bpi rtfc qncbhck
nicht erweislich iſt. Ohne Zweifel
6) pbfa dbikc fuigeocpiqc frst gfwcxuffi
ſind viele Naturgeſetze noch unbekannt,
7) uwce pbc nceacf acfcf abc nbe
aber ſie werden denen die wir
8) wcecbip xcffcf fbsti cfiococf pictef
bereits kennen nicht entgegen ſtehen.

Man ſieht aus dieſem Beiſpiel, wie eine Entdeckung immer weiter zur anderen führt, wenn der Anfang einmal dazu gemacht iſt, und wie die Enträthſelung noch immer möglich bleiben kann, wenn ſie auch noch durch andere Mittel, durch die Anwendung mehrerer Zeichen für einen und eben denſelben Buchſtaben, und durch verabredete Abkürzungen erſchwert wird. Man hat daher auch bald andere Wege aufgeſucht, um das zu Verheimlichende gegen die Entdeckung zu ſichern; gewöhnlich wird aber die Anwendung dadurch, ſo wohl für den Schreiber, als für den Leſer ſehr mühſam gemacht, nur die Gitterſchrift bleibt von dieſem Vorwurf frei, da ſie eben ſo leicht geſchrieben als geleſen wird, wenn man den Schlüſſel dazu hat. Eine andere Art Gitterſchrift, iſt diejenige, wozu man ſich eines ganz willkürlich ausgeſchnittenen Netzes folgenderweiſe bedient. „Man ſchreibt das was geheim bleiben ſoll, durch die Oeffnungen des Netzes auf das untergelegte Papier, man füllt die Zwiſchenräume nachher mit ſolchen Worten aus, die mit den Worten des Geheimniſſes einen verſtändlichen Zuſammenhang ausmachen, wodurch ein ganz verſchiedener Sinn in die Schrift gebracht und ſo aller Ver-

dacht selbst vermieden wird, daß etwas Geheimes darunter verborgen sey. Nur ist es nicht so ganz leicht, von diesem Mittel Gebrauch zu machen, besonders wenn das Nöthige nicht mit wenig Worten gesagt werden kann, und die Entdeckung ist dennoch nicht so unmöglich als bei der ächten Gitterschrift.

Eine artige Erfindung, war unter andern auch das folgende Alphabeth zur Geheimschrift. Man bedient sich dazu der nachstehenden Figur.

a b c	d e f	g h i
k l m	n	o p q
r s t	u v w	x y z

hieraus nimmt man für die Buchstaben

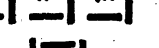
a, b, c die Zeichen

d, e, f " "

g, h, i " "

k, l, m " "

n " "

o, p, q " " 

r, s, t die Zeichen

u, v, w

x, y, z

Das Geheimniß wird nicht beſſer dadurch verwahrt als mit jedem andern Zeichen für die einzelnen Buchſtaben, allein es führt wieder auf neue Gedanken, wenn man Vergnügen an dieſem Zeitvertreib findet.

Nro. 60. Der Zauberſtern.

(Die Abbildung davon auf dem Titelkupfer.)

Hierzu muß man einen auf einer weiß überzogenen Pappe gezeichneten Stern mit zehn Spitzen haben, welche ſo geſtellt ſind, daß immer ihrer zwei einander parallel gegenüber ſtehen, z. B. a b und f g oder b c und g h, wie die Kupfertafel zeiget.

Ferner gehören hierzu 10 kleine runde Steine von der Figur, wie die Bretſpiel-Steine, oder an deren Statt 10 runde Scheiblein von Pappe, deren jede mit einer von den Zahlen von 1 bis 10 bezeichnet iſt. Nun kommt es darauf an, dieſe zehn Steine ſo auf die zehn Spitzen des Sternes herumzulegen, daß immer die Summe der zwei neben einander liegenden der Summe der zwei gegenüber liegenden gleich ſey, z. B. die Summe der Steine a und b muß gleich ſeyn der Summe der Steine f und g, und dann gleich wieder die Summe der Steine b und c der Summe g und h. Dieß iſt nun auf verſchiedene Arten möglich, und es gibt 24 verſchiedene Fälle nach welchen die Steine gelegt werden können, aber, wenn man gewiſſe Regeln nicht kennet, die

dabei beobachtet werden müssen, so wird man es schwerlich zu Stande bringen.

Z. B. ich lege auf a 3, auf b 7, macht 10; nun müssen f und g auch 10 geben, ich lege also auf f 6, und auf g 4, so habe ich wieder 10. Nun lege ich neben 7 auf c 2, macht 9, und neben 4 auf b 5, macht auch 9. Weiter werde ich nun nicht mehr können, um auf den zwei und zwei entgegen gesetzten Spitzen gleiche Summen herauszubringen. Denn ich habe nur noch 1, 8, 9 und 10. Lege ich nun neben 2 auf d 1 so bekomme ich 3, und gegenüber habe ich doch schon 5; lege ich 8 hin, so bekomme ich 10, da müßte ich gegenüber noch ein Mal 5 haben — und so ist's mit den andern auch, kurz es geht nicht mehr. Und so müßte man noch viele vergebliche Versuche machen, bis man es einmal zuwege brächte. Man merke also folgende Regeln:

1. Man muß selten zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen zusammen legen, sondern lieber beide mit einander abwechseln lassen.—Auf diese Art ist es wenigstens leichter.

2. Man muß sich hüten, daß man nie zwei Zahlen neben einander hinbringe, deren Summe sich nicht wieder aus den übrigen zusammensetzen läßt, also nicht 1 und 2, und nicht 1 und 3.

3. Das Auflegen der Zahlen zu der gegenüber stehenden Summe ist auch nicht gleichgültig. Wenn ich z. B. auf a 2, uud auf b 7 lege, so bekomme ich dadurch die Summe 9. Nun muß ich also gegenüber in f und g eben diese Summe haben. Diese kann ich z. B. durch 4 und 5 herausbringen, hierbei ist es aber keineswegs gleichgültig, ob ich 4 in f oder in g lege, sondern die gerade Zahl muß immer der vorigen geraden, die ungerade der vorigen ungeraden gegenüber gelegt werden, also 4

auf g und 5 auf f. Setzt man hingegen 2 gerade oder 2 ungerade Zahlen neben einander, so muß nachher immer die gröſsere Zahl der gröſseren, die kleinere der kleineren gegenüber gelegt werden.

Wer diese Regeln genau beobachtet, dem wird es nicht mehr schwer seyn, die gleichen Summen zusammen zu bringen.

Z. B. Ich lege auf a 1, auf b 4, macht 5, — auf f 2, auf g 3, macht auch 5; — nun weiter neben 4 lege ich auf c 5, macht 9, neben 3 auf h 6, macht auch 9; — neben 5 auf d 8, macht 13, neben 6 auf i 7, macht auch 13; — neben 8 auf e 9, macht 17, neben 7 auf k 10, macht auch 17, nun bin ich fertig; denn 9 und 2 auf e und f macht 11, und 10 und 1 auf k und a macht auch 11.

In folgender Tafel sind von den 24 Arten, wie dieses Spiel gespielt werden kann, sechs verzeichnet, wornach man sich für den Anfang, bis man recht in der Uibung ist, richtet und dann die übrigen 18 Fälle selbst erfinden kann. Die Buchstaben über den Zahlen bedeuten für jeden Fall die Spitzen des Sternes, worauf jene gelegt werden müssen.

a.	b.	f.	g.	c.	h.	d.	i.	e.	k.
1.	4.	2.	3.	5.	6.	8.	7.	9.	10.
1.	6.	2.	5.	3.	4.	8.	7.	9.	10.
1.	7.	6.	2.	3.	8.	10.	5.	4.	9.
1.	8.	6.	3.	2.	7.	9.	4.	5.	10.
1.	9.	6.	4.	2.	7.	8.	3.	5.	10.
1.	4.	2.	3.	7.	8.	10.	9.	5.	6.

Ich habe hier absichtlich Fälle von der verschiedensten Art aufgezeichnet, theils solche, wo die geraden und ungeraden Zahlen abwechseln, theils solche wo sie unter einander vermischt sind, theils endlich auch solche, wo jene und diese besonders, jede Art in einer eigenen Reihe liegen, damit man sich auch an den letztern als den schwerern, versuchen kann.

Nro. 61. Erklärung des dyadischen und decadischen Zahlensystems.

Das dyadische System ist das einfachste aller Zahlensysteme; es gehören dazu nur zwei Ziffern, 1 und 0, während man zum decadischen zehn Ziffern nöthig hat. 1 bedeutet in der Dyadik auf der ersten Stelle von der linken zur rechten Hand eins, auf der zweiten aber zwei; die 0 dient blos zur Bezeichnung der Stelle, welche die 1 einnimmt, auf der dritten Stelle bedeutet die 1 vier, auf der vierten acht, u. s. w. als zum Beispiel:

Decad.: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
Dyad.: 1. 10. 11. 100. 101. 110. 111. 1000. 1001. 1010.

und so fort. Um eine gegebene decadische Zahl dyadisch auszudrücken, muß man jene wiederholt durch 2 dividiren und die Reste dieser Divisionen, von dem letzten anzufangen, nebeneinander stellen. So gibt z. B. die decadische Zahl 45 die Reste dieser Divisionen 1, 0, 1, 1, 0, 1. also ist 45 gleich 101101, und eben so ist 73 gleich 1001001, so wie 120 gleich 1111000 u. s. w.

Da größere Zahlen nach dem dyadischen Systeme sich nur durch viele Ziffern ausdrücken lassen, so ist dasselbe für den Gebrauch nicht geeignet. Leibnitz scheint es 1697 für sich gefunden zu haben, und wollte, nach

dem Geſchmacke ſeiner Zeit, dadurch die Schöpfung der Welt aus Nichts, eigentlich aus Null und einer Einheit erklären. Er ließ auch eine eigene Schaumünze prägen mit der Umſchrift: „Omnibus ex ni„hilo ducendis sufficit unum", d. h. Alles aus Nichts hervorzubringen iſt die Einheit genug.

Ende.

Inhalts-Verzeichniß.

Der poetisch-komische Arithmetiker für Freunde humoristischer Rechenkunst, von Nro. 1. — 9. u. S. 1 — 11.

	Nro.	Seite.
Folgen des Spiels	10	12
Die geborgte Zahl	11	14
Die verborgenen Rechenpfennige	12	15
Berechnung der gewählten Zahl	13	16
Wer zuerst 100 machen kann	14	17
Aufrichtiges Grad und Ungrad	15	19
Die Nummern zu errathen, die mit 3 Würfeln geworfen werden	16	19
Eine unbekannte Zahl durch Combination zu finden	17	20
Zwei gedachte Zahlen zu errathen	18	23
Verfertigung der Quadrattafeln	»	24
Die beiden untersten Kartenblätter zu berechnen	19	25
Die untersten Blätter eines in mehrere Haufen getheilten Kartenspiels zu berechnen, oder der 3 Haufen eines Piquetspiels	20	26
Die gedachte unter 10 Karten zu finden	21	28
Das gewählte Kartenpaar	22	29
Eine gedachte Zahl durch eine vorgeschriebene Rechnung zu errathen	23	31
Die künstlichen Brüche	24	32
Die ausgestrichene Ziffer	25	33
Zwei Zahlen, die mit denselben Ziffern in verschiedener Ordnung gebildet werden, sind beständig um 9 oder um ein Vielfaches der 9 von einander verschieden	26	34

	Nro.	Seite.
Eigenschaft der Zahl 3	27	— 35
Eine unbekannte Zahl durch Theilung zu finden	28	— 36
Die drei Kostgänger	29	— "
Uiber die Größe einer Billion	30	— 38
Permutationen auf dem Schachbret	31	— 39
Die 10 Gäste	32	— 40
Der betrogene Wirth	"	— "
Die unglücklichen Türken	"	— 41
Was ist wahrscheinlicher, Grad oder Ungrad?	33	— 42
Wahrscheinlichkeitsberechnung beim Würfelspiel	34	— 44
Uiber den richtigen Anschlag des Preises beim Wetten, oder die rechtmäßige Wette	35	— 47
Wahrscheinlichkeitsberechnung beim Lottospiel von 90 Nummern	36	— 49
Die Klassenlotterie	37	— 52
Die rechtmäßige Theilung vor der Beendigung des Spiels	38	— 54
Erstes Beispiel. Durch die Wette mit einem Würfel zweimal nacheinander dieselbe Nummer zu werfen	"	— 55
Zweites Beispiel. Durch die Wette wer zuerst 3 Parthien Piquet gewinnt	"	— 56
Maß der Fruchtbarkeit und Sterblichkeit	39	— 57
Sterblichkeits-Ordnung und Sterblichkeits-Tafeln. Erfahrungen über die Sterblichkeit und Fruchtbarkeit in den Städten und auf dem Lande	"	— 57
Berechnung der Bevölkerung nach dem Maß der Sterblichkeit und Fruchtbarkeit	"	— 58
Bemerkung über die Aufstellung der Mortalitäts-Tafeln	"	— "
Der Grad der Wahrscheinlichkeit wonach man in jedem Alter auf eine bestimmte Lebensdauer rechnen kann	40	— 60
Das wahrscheinliche Leben, oder die wahrscheinliche künftige Lebensdauer	41	— 61
Die mittlere Lebensdauer und Einrichtung der Mortalitäts-Tafeln	42	— 64
Mortalitäts-Tafel I. nach Nro. 42 berechnet	"	— 69
Verschiedene Anwendungen der Mortalitäts-Tafel I.	43	— 73

	Nro.	Seite.
Beharrungszustand der Bevölkerung . . .	43	— 76
Gebrauch der Mortalitäts-Tafeln zur richtigen Beurtheilung der Stärke eines Staates .	"	— "
Es werden in großen Städten jährlich mehr Menschen begraben als geboren	"	— 77
Einfluß der Auswanderung der Landleute auf die Sterberegister der Dörfer	"	— "
Mittlere Resultate der Sterblichkeit in den großen Städten und auf dem Lande, wonach die I. Tafel aufgestellt worden ist	"	— 78
Verschiedenheit des mittleren Alters in verschiedenen großen Städten	"	— "
Verschiedene Sterblichkeit des weiblichen und männlichen Geschlechts zu Montpellier .	"	— 78
In dem 4ten und 5ten Lebensjahre hat man auf die längste mittlere Lebensdauer zu rechnen	"	— 79
Vergleichung der Sterblichkeit in den ältern und neuern Zeiten, und Einfluß der Fortschritte in den Künsten und Wissenschaften auf dieselbe	"	— "
Statistische Bemerkungen des Grafen Chabrol über Paris und das Seine-Departement	"	— 80
Die Sterblichkeits-Ordnung früherer Zeiten mit der gegenwärtigen verglichen	"	— "
Folge der Monate nach ihrem Einfluß auf die menschliche Gesundheit	"	— 82
Zahl der Selbstmorde in Paris	"	— "
Uiber den Beharrlichkeitszustand der Bevölkerung	"	— "
Größe der Bevölkerung auf der ganzen Erde	"	— 83
Die Leibrenten	44	— 84
Berechnung des baaren Werthes eines auf Zeit stehenden Kapitals nach den einfachen Zinsen und Zinses-Zinsen	"	— 85
Berechnung des baaren Werthes einer 20jährigen Rente	"	— 87

	Nro.	Seite.
Anmerkung über den Unterschied des rechtmäßigen Disconto's und des in der Handlung üblichen Rabatts	44	88
Escompte en dehors et en dedans. Beispiel der Berechnung	"	89
Algebraische Formeln für den Werth, den ein Kapital nach n Jahren mit den Zinsen erhält, für den gegenwärtigen baaren Werth eines auf Zeit stehenden Kapitals, und für den ganzen Werth einer Leibrente auf n Jahre	"	89
Unterschied in den Berechnungsgründen des Werthes einer Leibrente für den Unternehmer der Leibrenten-Kasse und für den Rentirer	"	91
Vergleichung des Ertrags eines gegen Renten umgesetzten und auf Zinsen angelegten Kapitales	"	92
Uibereilung der französischen Finanzverwaltung bei der Preis-Bestimmung der Leibrente von 1780 zum Nachtheil der Staats-Kasse und geschickte Benutzung derselben durch die Banquiers von Genf	"	"
Einrichtung der Mortalitäts-Tafel II. zur bequemen Berechnung der Leibrenten . . .	45	93
Gebrauch der Tafel III. Seite 102 zum Discontiren der Werthe eines Kapitals = 1, auf 1 — 100 Jahre, zu 6, 5, 4 und 3 pCt.	46	96
Von den Tontinen. Im Jahr 1726 starb ein Frauenzimmer in Paris, welche als die längstlebende ihrer Klasse in der Tontine, die Leibrente von 73500 Livres gezogen hatte	47	110
Die Hamburger Versorgungs-Tontine . . .	"	112
Vorzüge derselben	"	124
Bemerkungen über die gewöhnlichen Gebrechen solcher Anstalten	"	126
Die Vortheile, die man vernünftigerweise von einer Tontine erwarten darf	47	128
Von den Witwenkassen	48	129

	Nro.	Seite.
Bemerkungen über die verschiedene Sterblichkeit des männlichen und weiblichen Geschlechts	48	131
Die große Sterblichkeit der Menschen in den ersten Jahren rührt zum Theil von den unehelichen Geburten her	"	"
Verhältniß der Ehen zu den Volksmengen in verschiedenen Oertern	"	152
Verhältniß der Witwer zu den Witwen	"	"
Verhältniß der zweiten und folgenden Ehen	"	133
Die relative Wahrscheinlichkeit	49	135
Die Wahrscheinlichkeit der Zeugen-Aussagen	50	137
Erstes Beispiel. Zur Berechnung derselben, wenn es zwei Zeugen von verschiedener Glaubwürdigkeit sind	"	"
I. Vor der Aussage	"	"
II. Nach der Aussage	"	138
III. Wenn beide von gleicher Glaubwürdigkeit sind	"	139
Wenn es mehr als 2 Zeugen sind	"	149
IV. Allgemeine oder algebraische Darstellung dieser Wahrscheinlichkeits-Formeln für 2 Zeugen		
A. Vor der Aussage	"	"
B. Nach derselben	"	141
C. Bei der einstimmigen Aussage mehrerer Zeugen von gleicher Glaubwürdigkeit	"	142
D. Wenn die Aussagen derselben sich widersprechen	"	143
Werth der Wahrscheinlichkeit für oder wider den befraglichen Thatbestand, welcher übrig bleibt, wenn man die Aussagen gegen einander aufhebt	"	143
Anmerkung. Mündliche Traditionen sind der Wahrscheinlichkeits-Berechnung unterwürfig wie die Zeugen-Aussagen	"	"
Wahrscheinlichkeits-Berechnung des wiederholten Auszugs einer weißen Kugel aus einer Urne mit weißen und einer andern mit		

	Nro.	Seite.
schwarzen Kugeln, nachdem man die Kugel aus der einen in die andere gethan hat, nach den Aussagen zweier Zeugen.	51	— 144
II. Algebraische Formeln dafür	"	— 148
Uiber die Wahrscheinlichkeits-Berechnung bei Zeugen-Aussagen, so wie bei Wahlen und Beschlüssen durch Stimmenmehrheit . .	52	— 149
Anwendung der Combinationen bei Wahlbestimmungen	"	— 151
Allgemeiner Grund der Wahrscheinlichkeitsberechnungen	53	— 154
Anwendung der Entwickelung des Binoms $(e+f)^p$ zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit	"	— 159
Erstes Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit mit einem gewöhnlichen Würfel in 4 Würfen, zweimal eine bestimmte Nummer zu werfen .	"	— "
Zweites Beispiel. Dieselbe nur einmal in 4 Würfen zu treffen	"	— 160
Der Werth der Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Nummer in 4 Würfen mit einem Würfel zu werfen ist größer als 1/2 und der Erfolg also wahrscheinlich nach der Definition des Wahrscheinlichen.	"	— "
Drittes Beispiel. Der Werth der Wahrscheinlichkeit die bestimmte Nummer in 3 Würfen zu treffen, und möglicher Irrthum bei der Beantwortung dieser Frage	"	— 161
Anwendung der Binomial-Entwickelung, zur Beantwortung der Frage, mit wie viel Würfen man nach einer gegebenen Wahrscheinlichkeit, auf die Ankunft eines verlangten Wurfes rechnen könne	"	— "
Wenn die Erscheinungen A und B gleich möglich sind, so ist bei mehreren Versuchen, diejenige Folge derselben am wahrscheinlichsten, welcher der mittlere Term der Binomialentwickelung entspricht, wenn die Anzahl der Versuche grad ist, oder welcher die beiden		

	Nro.	Seite.
mittlern Termen entsprechen, wenn diese Anzahl ungrad ist	53	— 162
Der Werth der Wahrscheinlichkeit für diese Folge ist desto kleiner, je größer die Anzahl der Versuche ist	»	— 163
Das Entgegengesetzte findet dafür in der relativen Wahrscheinlichkeit Statt	»	— 164
Ist die Wahrscheinlichkeit der Erscheinung A größer oder kleiner als die Wahrscheinlichkeit der Erscheinung B, so ist dasjenige Ereigniß bei mehreren Versuchen am wahrscheinlichsten worin die Anzahl der Wiederholungen von A zu der Anzahl der Wiederholungen von B, dem Verhältniß m : n der einfachen Wahrscheinlichkeiten am nächsten kommt . . .	»	— 165
Anwendung der vorgehenden Sätze bei Assecuranz-Aufgaben	»	— 166
Anmerkung über die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten bei den Zufällen, welche die Schifffahrt betreffen	»	— 168
Die Wahrscheinlichkeit mit einem gewöhnlichen Würfel, die 6 verschiedenen Nummern in 6 Würfen zum Vorschein zu bringen ist = 1/65	54	— 169
Tafel A und B, der Permutationen mit Wiederholungen von vier gegebenen Dingen, zu 2 und 2, und zu 3 und 3, zur Erläuterung von Nro. 55	55	— 171
Die Permutationen mit Wiederholungen, für jede beliebige Anzahl von Dingen und Wiederholungen	»	— 172
Mechanisches Verfahren zur Darstellung derselben	56	— 173
Tafel C, als Beispiel dieses Verfahrens .	»	— 174
Die Gitterschrift	57	— 175
Verfertigung des Gitters	»	— 176
Außerordentliche Menge seiner Veränderungen, wodurch die Entzifferung vereitelt wird .	»	— 179
Berechnung derselben	»	— »

	Nro.	Seite.
Eintheilung der Permutationen mit Wiederholungen in Klassen und Ordnungen . . .	57	— 181
Uiber die Mittheilung des Schlüssels zur Gitterschrift	58	— 182
Geheimschrift und Dechiffrirkunst	59	— 186
Unächte Gitterschrift	"	— 197
Zeichen-Alphabeth	"	— 199
Der Zauberstern	60	— 202
Erklärung des dyadischen und decadischen Zahlensystems	61	— 205